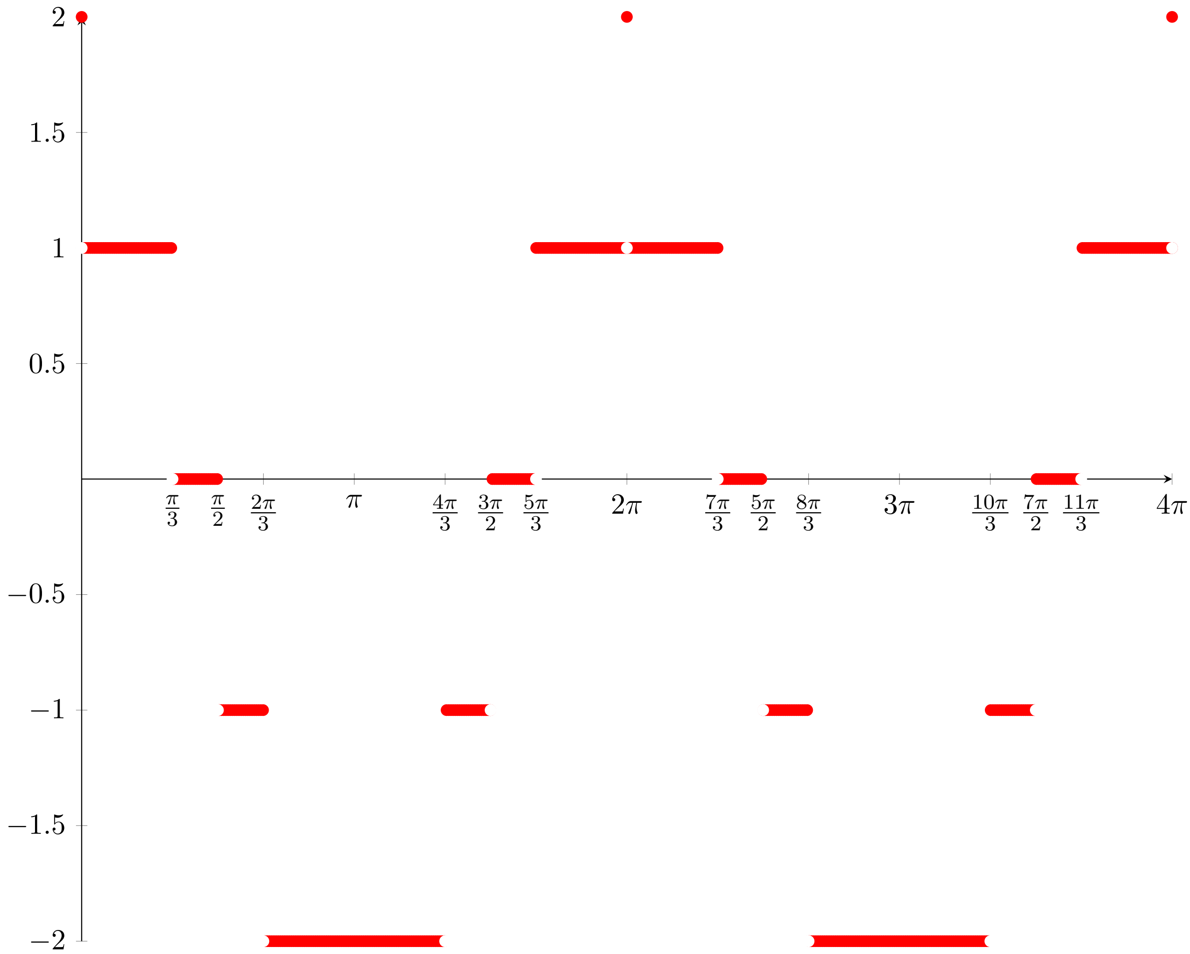
Corrigé du partiel du 4 novembre 2025

Exercice 1. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{c} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) = E(2\cos(x)). \end{array}$$

1. Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-x \in \mathbf{R}$ et $\cos(-x) = \cos(x)$ et donc $f(-x) = f(x)$. La fonction f est *paire*.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et donc $f(x + 2\pi) = f(x)$. La fonction f est *périodique*, et 2π en est une période.
3. La fonction f n'est pas injective puisque $f(2\pi) = f(0)$. La fonction f ne prend que des valeurs entières, donc elle n'est pas surjective puisqu'aucun point de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ n'est dans son image.
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$
donc
$$-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$$
puis
$$-2 = E(-2) \leqslant E(2\cos(x)) \leqslant 2$$
par croissance de la fonction E. Comme E est à valeurs entières, il en découle que l'image de f est contenue dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Réciproquement, chacun de ces cinq entiers est bien dans l'image de f car
$$f(\pi) = -2,\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ et } f(0) = 2.$$
Au final, nous avons prouvé :
$$f(\mathbf{R}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$
5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f(x) = 2 \iff E(2\cos(x)) = 2 \iff 2 \leqslant 2\cos(x) < 3 \iff 1 \leqslant \cos(x) < \frac{3}{2}$$
donc, puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$,
$$f(x) = 2 \iff \cos(x) = 1 \iff x \in 2\pi\mathbf{Z}.$$
Ainsi, nous avons prouvé :
$$f^{-1}(\{2\}) = 2\pi\mathbf{Z}.$$
La fonction f ne prenant que des valeurs entières,
$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \varnothing.$$
6.



Exercice 2. L'inéquation

$$\frac{x+1}{x-2} \leqslant \frac{x-1}{x-10}$$

a un sens pour tout nombre réel x distinct de 2 et 10.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, 10\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2} \leqslant \frac{x-1}{x-10} &\iff \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x-10} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{(x+1)(x-10)-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-10)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{-6x-12}{(x-2)(x-10)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{x+2}{(x-2)(x-10)} \geqslant 0 \\
&\iff x+2 \text{ et } (x-2)(x-10) \text{ sont de même signe.}
\end{aligned}$$

Dressons le tableau des signes de ces deux expressions :

		-2		2		10	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-2)(x-10)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est donc :

$$[-2, 2[\cup]10, +\infty[.$$

Exercice 3. Soit h la fonction définie par :

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbf{R}\setminus\{1\} &\to \mathbf{R}\setminus\{1\} \\ x &\mapsto h(x) = \tfrac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

1. La fraction rationnelle $\frac{x}{x-1}$ est bien définie sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ et elle ne vaut jamais 1 puisque $x \neq x-1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction h est donc correctement définie.

   Pour tout $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

   $$h \circ h(x) = h(h(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} \cdot (x-1) = x$$

   donc $h \circ h$ est la *fonction identité* de $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même.

2. Pour tous $x, y \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

   $$h(x) = y \Longrightarrow h(h(x)) = h(y) \Longrightarrow x = h(y) = \frac{y}{y-1}$$

   et

   $$h(h(y)) = y,$$

   donc tout élément y de $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ *admet un unique antécédent* par h, en l'occurrence $h(y)$. La fonction h est ainsi une bijection de $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même, et sa fonction réciproque est h elle-même.

3. Comme $h \circ h = \mathrm{id}_{\mathbf{R}\setminus\{1\}}$, il vient

   $$h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h = (h \circ h) \circ (h \circ h) \circ (h \circ h) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}\setminus\{1\}}$$

   et

   $$h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h = (h \circ h) \circ (h \circ h) \circ (h \circ h) \circ h = h.$$

Exercice 4. Soit f et g les fonctions définies par

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2|\sin(x)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto g(x) = -\big||x| - \pi\big|. \end{aligned}$$

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

   $$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in 2\pi\mathbf{Z}$$

   et

   $$g(x) = 0 \Longleftrightarrow |x| = \pi \Longleftrightarrow x \in \{-\pi, \pi\}.$$

   Ainsi, nous avons prouvé :

   $$f^{-1}(\{0\}) = 2\pi\mathbf{Z} \;\text{ et }\; g^{-1}(\{0\}) = \{-\pi, \pi\}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-x \in \mathbf{R}$,

   $$f(-x) = 2|\sin(-x)| = 2|-\sin(x)| = 2|\sin(x)| = f(x)$$

   et

   $$g(-x) = -\big||-x| - \pi\big| = -\big||x| - \pi\big| = g(x),$$

   donc les fonctions f et g sont *paires*.

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$0 \leqslant |\sin(x)| \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 2,$$
donc l'ensemble $A = f(\mathbf{R})$ est minoré par 0 et majoré par 2. Puisque
$$0 = f(0) \in A \text{ et } 2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in A,$$
0 est le *minimum* de A, donc également sa borne inférieure, et 2 est le *maximum* de A, donc également sa borne supérieure.

4. La fonction g est à valeurs *négatives*. Nous allons démontrer que l'on a $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{\leqslant 0}$ en établissant que tout nombre réel négatif est dans l'image de g. Considérons donc $y \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$g(x) = y \Longleftrightarrow \big||x| - \pi\big| = -y \Longleftrightarrow |x| = \pi - y$$
puisque $-y \geqslant 0$. En observant que $\pi - y$ est supérieur à π, donc positif, on en déduit
$$g(\pi - y) = y$$
et donc $y \in g(\mathbf{R})$.

   Nous avons ainsi établi :
$$g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{\leqslant 0}.$$

5. et 6.