

Partiel – Durée 90 min – le 4 novembre 2025

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1. Nous rappelons que $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ désigne la fonction partie entière, celle définie dans le cours. Soit la fonction f

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = E(2 \cos(x)). \end{aligned}$$

1. Etudier la parité de la fonction f . C'est-à-dire déterminer si la fonction f est paire, impaire ou bien ni paire ni impaire.
2. Montrer que la fonction f est périodique.
3. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Déterminer l'image de $\mathbf{R}$ par f , c'est-à-dire $f(\mathbf{R})$.
5. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.
6. Tracer la courbe représentative de f pour tout $x \in [0, 4\pi]$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que les deux membres de l'inégalité suivante soient bien définis et tels que l'inégalité soit satisfaite :

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-1}{x-10}.$$

Exercice 3. On définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} h &: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{1\} \\ x &\mapsto h(x) = \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

1. Justifier que h est bien définie et calculer $h \circ h$ (on donnera les ensembles de départ et d'arrivée de $h \circ h$).
2. En déduire que h est bijective et donner sa fonction réciproque.
3. Calculer

$$h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h$$

et

$$h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h.$$

Exercice 4. On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2|\sin(x)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto g(x) = -||x| - \pi|. \end{aligned}$$

1. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{0\})$.
2. Etudier la parité de f et de g .

3. Soit l'ensemble

$$A = f(\mathbf{R})$$

L'ensemble A est-il minoré, majoré ? Admet-il un maximum, un minimum, une borne inférieure, une borne supérieure ?

4. Donner l'image de g .
5. Tracer, sur le même graphe, les fonctions f et g sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
6. Hachurer sur ce graphe (si possible en rouge) l'ensemble suivant :

$$\{(x, y) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$