

Partiel blanc – Durée 90 min – le 3 novembre 2025

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses et **les réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1. 1. Déterminer l'ensemble A des réels x tels que les deux membres de l'inégalité suivante soient bien définis et tels que l'inégalité soit satisfaite :

$$\frac{x+5}{x+1} \leq \frac{x-9}{x-1}.$$

2. L'ensemble A est-il majoré, minoré, borné? Admet-il un maximum, un minimum, une borne supérieure, une borne inférieure?

Exercice 2. Soit la fonction f suivante

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = E(|\sin(x)|). \end{aligned}$$

1. Donner l'image de f .
2. Étudier la parité de f .
3. Étudier la périodicité de f .
4. Tracer le graphe de f .

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}. \end{aligned}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Calculer la dérivée de f sur $]0; +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
3. Montrer que si on restreint f à l'intervalle $[0, +\infty[$, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on déterminera. On donnera aussi sa fonction réciproque.
4. Montrer que si on restreint f à l'intervalle $] - \infty, 0]$, f réalise une bijection de $] - \infty, 0]$ vers un intervalle que l'on déterminera. On donnera aussi sa fonction réciproque.
5. Montrer que finalement f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle que l'on déterminera. On donnera sa fonction réciproque.

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $x \in] - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

2. En déduire la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 5. On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

et

$$g : x \mapsto \arctan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right).$$

1. Donner les ensembles de définition de f .
2. Etudier la parité de f .
3. Donner les ensembles de définition de g .
4. Etudier la parité de g .
5. Calculer la dérivée de f .
6. Calculer la dérivée de g .

On pourra remarquer que $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = (1 + x^2)^3$

7. En déduire que pour tout $x \in]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

$$\arctan\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right) = 3 \arctan(x).$$