Licence 1 Mathématiques Informatique.

ANALYSE 1 POUR L'INFORMATIQUE

Christophe Poquet

Année universitaire 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

est *l'ensemble des entiers naturels*. Si l'on enlève le 0 on définit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls*.

1.1.2 Les entiers relatifs

En ajoutant les entiers négatifs on définit *l'ensemble des entiers relatifs* par

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

De même, si l'on enlève le 0, on définit $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers relatifs non nuls*.

Remarque 1.1.

1. *On remarque que l'ensemble* $\mathbb{N}$ *est* **inclus** *dans l'ensemble* $\mathbb{Z}$*, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :*

   $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

   où le symbole $\subset$ *se lit « est inclus dans ». En effet, tout élément de* $\mathbb{N}$ *est également élément de* $\mathbb{Z}$*, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :*

   $$\textit{si} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{alors} \quad n \in \mathbb{Z},$$

   où le symbole $\in$ *se lit « appartient à ».*
2. *On voit immédiatement que l'inclusion réciproque est fausse, c'est-à-dire* $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$*, puisque par exemple* $-1 \in \mathbb{Z}$ *alors que* $-1 \notin \mathbb{N}$*.*
3. *Attention à ne pas confondre les symboles* $\subset$ *et* $\in$ *!*

1.1.3 Les nombres rationnels

On définit *l'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,:\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarque 1.2.

1. *Puisque tout entier relatif* n *peut être écrit sous la forme*
$$n = \frac{n}{1},$$
on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. *Un nombre rationnel peut être représenté par différentes fractions, par exemple* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$ *Plus précisément, pour* $a, a' \in \mathbb{Z}$ *et* $b, b' \in \mathbb{Z}^*$*, on a*
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si et seulement si} \quad ab' = a'b.$$
Attention, l'expression « P si et seulement si Q », que l'on peut abréger en « P ssi Q » ou « P $\Leftrightarrow$ *Q » (voir le cours d'Algèbre 1), signifie deux choses : « si P est vraie alors Q est vraie » et « si Q est vraie alors P est vraie ».*

1.1.4 Les nombres décimaux

On définit *l'ensemble des nombres décimaux* $\mathbb{D}$ de la manière suivante :
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Il s'agit des nombres ayant une suite **finie** de chiffres à droite de la virgule.

Remarque 1.3.

1. *Tous les éléments de* $\mathbb{D}$ *peuvent être écrit sous forme de fraction, et donc* $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. *L'inclusion réciproque est fausse, puisque certaines fractions ne peuvent être écrites qu'avec une infinité de chiffres après la virgule, comme par exemple*
$$\frac{1}{3} = 0.333333333333333333333333\dots$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ donne un rôle privilégié au nombre 10 (les dix doigts des mains). Du point de uvue des mathématiciens, les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont plus importants.

1.1.5 Les nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est composée de

- un signe $+$ ou $-$ (généralement omis lorsque c'est le $+$),
- une suite finie de chiffres entre 0 et 9, ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0,
- une virgule,
- une suite finie ou infinie de chiffres entre 0 et 9.

Exemples 1.4. *Par exemple* 0, 4, -10.3, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π *sont des nombres réels.*

Remarque 1.5.

1. *Attention avec cette définition un réel ne s'écrit pas de manière unique, par exemple* $1 = 1.0$, $0 = 0.0 = -0 = -0.00$, $1 = 0.99999999999\dots$
2. *On a l'inclusion* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*, mais l'inclusion réciproque est fausse, on ne peut par exemple pas écrire* $\sqrt{2}$ *comme* $\frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}^*$ *(voir le cours d'Algèbre 1).*

1.2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels

Dans l'enfance on apprend à additionner, multiplier et comparer les entiers. Ceci s'étend aux nombres réels (résultat admis, fastidieux à démontrer).

Proposition 1.6. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ (ou $\times$) qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et ont les propriétés suivantes :*

1. **commutativité :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$
2. **associativité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$
3. **distributivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$
4. **éléments neutres :** *pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a*
$$a + 0 = a \quad \text{et} \quad a \cdot 1 = a,$$
5. **élément absorbant :** *pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a*
$$a \cdot 0 = 0.$$

Proposition 1.7. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leqslant$ qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. **réflexivité :** *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a \leqslant a,$$
2. **antisymétrie :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant a, \quad \text{alors} \quad a = b,$$
3. **transitivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant c, \quad \text{alors} \quad a \leqslant c,$$
4. **ordre total :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,*
$$a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a,$$
5. **compatibilité avec l'addition :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad a + c \leqslant b + c,$$
6. **compatibilité avec la multiplication :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0, \quad \text{alors} \quad a \cdot c \leqslant b \cdot c.$$

Remarque 1.8. *En mathématiques le « ou » est inclusif : « A ou B » signifie soit A, soit B, soit les deux.*

$a \leqslant b$ se lit « a inférieur ou égal à b ». On écrit de plus, pour a, b dans $\mathbb{R}$
- $a \geqslant b$ (qui se lit « a supérieur ou égal à b ») si $b \leqslant a$,
- $a < b$ (qui se lit « a strictement inférieur à b ») si $a \leqslant b$ et $a \neq b$,
- $a > b$ (qui se lit « a strictement supérieur à b ») si $b < a$.

On remarque que le contraire de $a \leqslant b$ est $a > b$.

Remarque 1.9.

1. *On ne peut pas soustraire des inégalités : on a $2 \leqslant 3$ et $1 \leqslant 4$ mais $2 - 1 = 1$ n'est pas inférieur ou égal à $3 - 4 = -1$!*
2. *La multiplication par un réel négatif change le sens de l'inégalité : si a, b, c sont des réels,*
$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0, \quad \text{alors} \quad a \cdot c \geqslant b \cdot c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 1.10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la* **valeur absolue** *de x, notée $|x|$, de la manière suivante :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.11. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max(-a, a),$$
2. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = 0 \quad si\ et\ seulement\ si \quad a = 0,$$
3. *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$
4. **inégalité triangulaire :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$
5. **inégalité triangulaire inverse :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue.

Démontrons le point 4. Considérons deux réels a et b. D'après 1) on a $|a+b| = \max(a+b, -a-b)$. Mais comme $a \leqslant \max(-a, a) = |a|$ et $b \leqslant |b|$ on a $a + b \leqslant |a| + |b|$. De même, comme $-a \leqslant |a|$ et $-b \leqslant |b|$ on a $-a - b \leqslant |a| + |b|$. Ainsi

$$|a + b| = \max(a + b, -a - b) \leqslant |a| + |b|.$$

Finalement démontrons le point 5). Considérons à nouveaux deux réels a et b. D'une part d'après 4) on a $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$ et donc $|a-b| \geqslant |a|-|b|$. D'autre part on a $|b| = |b-a+a| \leqslant |b-a|+|a|$ et donc $|a - b| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. On en déduit bien

$$|a - b| \geqslant \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = ||a| - |b||.$$

□

1.4 Intervalles

Intuitivement, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ».

Définition 1.12 (Intervalles de $\mathbb{R}$). *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, pour tous x, y éléments de I, tout réel z vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$ est également un élément de I.*

Proposition 1.13. *Les intervalles I de $\mathbb{R}$ ont l'une des formes suivantes :*

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$, **l'ensemble vide**, *qui ne contient aucun élément,*
3. $\{a\}$, **un singleton**, *avec $a \in \mathbb{R}$,*
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, **un segment** , *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
5. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ *ou* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $]-\infty, a] == \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ *ou* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, *avec a réel.*

Remarque 1.14. *Dans les points 4., 5. et 6. de la proposition précédente les réels a et b sont appelés les* **bords** *de l'intervalle.*

1.5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.15. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de A.*

1. *On dit que a est* **le plus grand élément de** A *(ou* **maximum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \leqslant a$,*
2. *On dit que a est* **le plus petit élément de** A *(ou* **minimum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \geqslant a$.*

S'il existe, le plus grand élément de A est unique, on le note $\max(A)$. *De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique, on le note* $\min(A)$.

Exemples 1.16.

1. *Une partie finie A de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé d'un nombre fini d'éléments) a toujours un plus grand élément.*
2. 1 *est le plus grand élément de* $[0, 1]$.
3. $\mathbb{N}$ *et* $[0, 1[$ *n'admettent pas de plus grand élément.*

Définition 1.17. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et m un réel.*

1. *On dit que m est un* **majorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \geqslant a$.*
2. *On dit que m est un* **minorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \leqslant a$.*

Exemples 1.18.

1. 1 *et* 4 *sont des majorants de* $[0, 1]$ *et* $[0, 1[$,
2. $\mathbb{N}$ *n'a pas de majorant.*

Définition 1.19. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est*

1. **majorée** *si elle admet un majorant,*
2. **minorée** *si elle admet un minorant,*
3. **bornée** *si elle admet un majorant et un minorant.*

Exemples 1.20.

1. $[0, 1]$ *et* $[0, 1[$ *sont bornés,*
2. $[0, +\infty[$ *est minoré mais n'est pas borné.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.21 (Théorème de la borne supérieure)**.** *Toute partie A de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet un plus petit majorant, appelé la* **borne supérieure de** A *et noté* $\sup(A)$.

Exemple 1.22. *On a* $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1[) = 1$.

Remarque 1.23. *Ce théorème n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$: l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ est majoré mais n'admet pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.*

De même, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors elle admet un plus grand minorant, appelée **borne inférieure de** A et noté $\inf(A)$.

Par convention, si A n'est pas majorée on note $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée on note $\inf(A) = -\infty$.

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.24 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Alors $M = \sup(A)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M]$* [1] *est non vide.*

---

1. Pour deux ensembles A et B, $A \cap B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et B.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $M = \sup(A)$ et considérons $\varepsilon > 0$. Alors, comme $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, puisque M est le plus petit des majorants. Il existe donc un élément a de A tel que $a > M - \varepsilon$. Puisque M est un majorant on a $a \leqslant M$, et donc $a \in]M - \varepsilon, M] \cap A$. L'ensemble $]M - \varepsilon, M] \cap A$ est donc non vide.

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M]$ est non vide. On veut montrer que si $m < M$ alors m n'est pas un majorant de A, puisque dans ce cas M est bien le plus petit majorant de A. Fixons $m < M$ et posons $\varepsilon = M - m > 0$. Par hypothèse l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M] = A \cap]m, M]$ est non vide, et il existe donc un élément a de A qui vérifie $m < a$. m n'est donc pas un majorant de A. $\square$

Chapitre 2

Fonctions réelles

2.1 Fonctions et graphes

Définition 2.1. *Une* **application** f *d'un ensemble de départ* E *dans un espace d'arrivée* F *est un procédé qui associe à chaque élément* x *de* E *un unique élément* $f(x)$ *de* F*. Une telle application est notée*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle parfois E *le domaine de* f *et* F *le codomaine de* f*.*

Définition 2.2. *On appelle* **fonction réelle d'une variable réelle** *toute application* f *ayant pour ensemble de départ une partie* A *de* $\mathbb{R}$*, et ensemble d'arrivée une partie* B *de* $\mathbb{R}$ *:*

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle l'ensemble A *le* **domaine de définition** *de* f*.*

Remarque 2.3. *Pour simplifier, dans la suite de ce cours, on parlera simplement de fonction pour désigner une fonction réelle d'une variable réelle (les fonctions de plusieurs variables réelles seront par exemple abordées dans des cours ultérieurs).*

Exemples 2.4. *On peut considérer les fonctions suivantes :*

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad |\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Définition 2.5. *Si* E *et* F *sont deux ensembles, on note* $E \times F$ *le* **produit cartésien** *de* E *et* F*, défini par*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Remarque 2.6. *Pour un ensemble* E *on écrit* E^2 *plutôt que* $E \times E$*.*

Définition 2.7. *Si* $f : E \to F$ *est une fonction on appelle* **graphe** *de* f *l'ensemble*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Remarque 2.8.

1. *Le graphe d'une fonction réelle est une partie de* $\mathbb{R}^2$*, on peut le représenter par un dessin (voir la figure 2.1).*
2. *Une partie de* A *de* $\mathbb{R}^2$ *est le graphe d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si et seulement si toute droite verticale intersecte* A *en un unique point.*

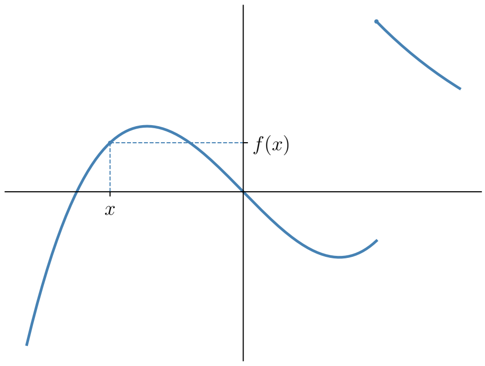


FIGURE 2.1 – Exemple de tracé du graphe d'une fonction réelle.

2.2 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

2.2.1 Image, antécédent.

Définition 2.9. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Si $x \in E$ et $y \in F$ vérifient $y = f(x)$, on dit que y est* **l'image** *de x par f, et que x est* **un antécédent** *de y par f.*

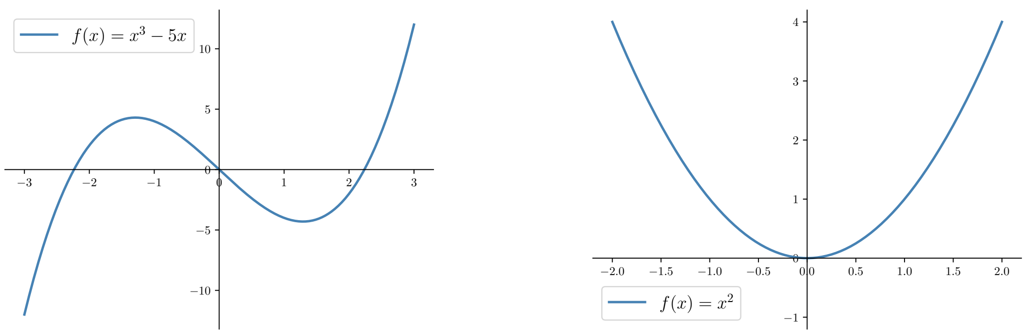
Remarque 2.10. *Si $f : E \to F$, alors chaque $x \in E$ admet une et une seule image par f, alors que $y \in F$ peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par f.*

Exemple 2.11. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, -1 a pour image 1, 2 a pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, alors que -3 n'a pas d'antécédent par f.*

2.2.2 Surjectivité.

Définition 2.12. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **surjective** *(ou une surjection) si tout élément de F admet* **au moins un antécédent**, *autrement dit*[1] *:*

$$f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall y \in F,\, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\Big).$$



(a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x$ est surjective.

(b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective.

FIGURE 2.2 – Exemples de fonctions surjective/non surjective.

Remarque 2.13. *Lorsque $f : E \to F$, f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$ la droite horizontale passant par $(0, y)$ intersecte $\mathrm{Gr}(f)$.*

1. Le symbole $\forall$ signifie se lit « pour tout », le symbole $\exists$ se lit « il existe ».

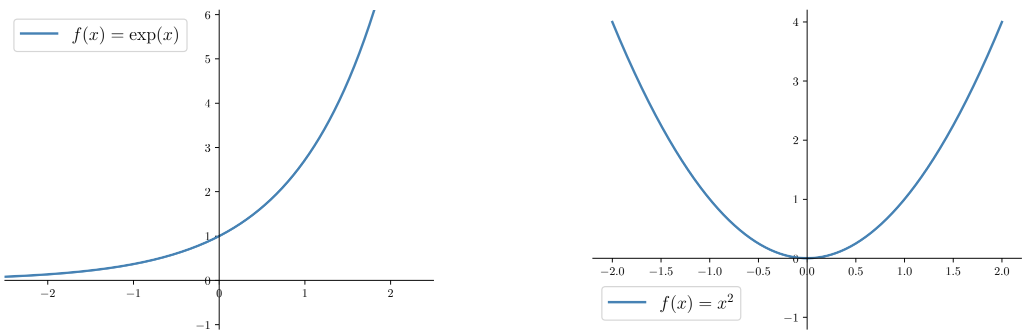
2.2.3 Injectivité.

Définition 2.14. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **injective** *(ou une injection) si tout élément de F admet* **au plus un antécédent**, *autrement dit*[2] *:*

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big).$$

Remarque 2.15. *De manière équivalente, puisque $P \Rightarrow Q$ équivaut à $(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$ (voir le cours d'algèbre 1), on a*

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\Big).$$



(a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$ est injective.

(b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

FIGURE 2.3 – Exemples de fonctions injective/non injective.

Remarque 2.16. *Lorsque $f : E \to F$, f est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte* $\mathrm{Gr}(f)$ *au plus une fois.*

2.2.4 Bijectivité.

Définition 2.17. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **bijective** *(ou une bijection) si tout élément de F admet* **un unique antécédent**, *autrement dit*[3] *:*

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall y \in F,\ \exists ! x \in E \text{ tel que } y = f(x)\Big).$$

Remarque 2.18. *Lorsque $f : E \to F$, f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$ la droite horizontale passant par $(0, y)$ intersecte* $\mathrm{Gr}(f)$ *une et une seule fois.*

Définition 2.19. *Supposons la fonction $f : E \to F$ bijective. En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f on définit une fonction de F dans E. Cette fonction est appelée fonction réciproque de la fonction f, et est notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation suivante :*

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Remarque 2.20. *Si $f : E \to F$ est bijective de bijection réciproque f^{-1}, alors $f^{-1} : F \to E$ est elle-même bijective de bijection réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$. On a de plus les formules*

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } f(f^{-1}(y)) = y.$$

2. Le symbole $\Rightarrow$ est le symbole de l'implication : $P \Rightarrow Q$ signifie « si P est vraie, alors Q est vraie ».
3. Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

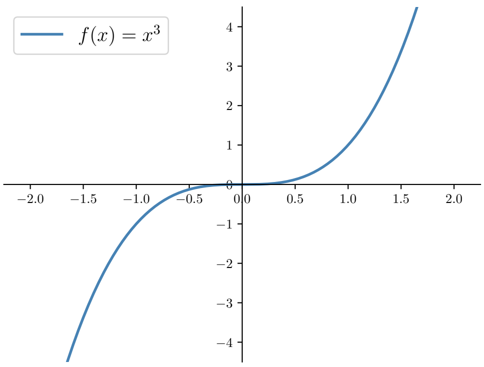


FIGURE 2.4 – La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est bijective.

Remarque 2.21. *Si $f : E \to F$ est bijective de réciproque f^{-1}, alors $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ est le symétrique de $\mathrm{Gr}(f)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. En effet,*

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) &\Leftrightarrow (x \in E \ \text{ et } y = f(x) \ \text{ et } y \in F) \\ &\Leftrightarrow (y \in F \ \text{ et } x = f^{-1}(y) \ \text{ et } x \in E) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathrm{Gr}(f^{-1}).\end{aligned}$$

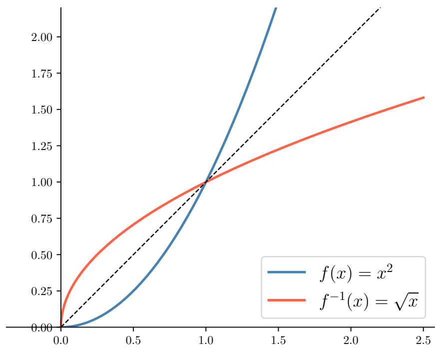


FIGURE 2.5 – La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ a pour fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

2.3 Image directe, image réciproque.

Définition 2.22. *Si $f : E \to F$ est une fonction et A est une partie de E,* **l'image directe** *de A par f, notée $f(A)$, est la partie de F définie par*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

En particulier, pour $A = E$, on appelle **image de** *f l'ensemble* $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

Exemple 2.23. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors* $f([0, 1]) = [0, 1]$, $f([-2, 1]) = [0, 4]$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Définition 2.24. *Si $f : E \to F$ est une fonction et B est une partie de F,* **l'image réciproque** *de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est la partie de E définie par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

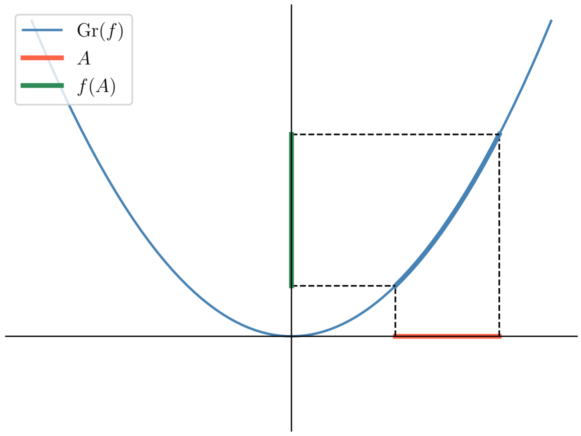


FIGURE 2.6 – Image directe d'une partie A de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle.

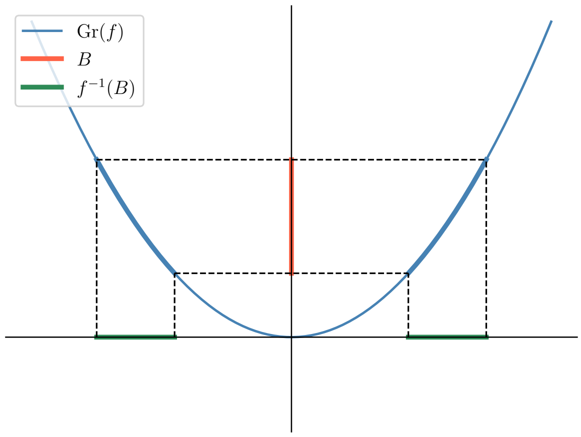


FIGURE 2.7 – Image réciproque d'une partie B de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle.

Remarque 2.25.

1. *Attention, cette définition ne suppose pas que f soit bijective !*
2. *Si f est bijective, $f^{-1}(B)$ est l'image directe de B par f^{-1}.*

Exemples 2.26. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$, $f^{-1}([-2,4]) = [-2,2]$.*

2.4 Opérations sur les fonctions.

2.4.1 Somme, produit, quotient.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ayant le même ensemble de départ. On définit

1. leur **somme** :
$$f+g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array},$$
2. leur **produit** :
$$f \cdot g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array},$$

3. et, si g ne s'annule pas sur I, leur **quotient** :

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}.$$

2.4.2 Composition.

Définition 2.27. *Si E, F, G sont des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des fonctions, on définit la* **composition** *de f et g, notée $g \circ f$, par*[4]

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Exemple 2.28. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x + 2$, alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$g \circ f(x) = \sin(x) + 2 \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \sin(x + 2).$$

Remarque 2.29.

1. *Pour pouvoir définir $g \circ f$ il faut que l'ensemble d'arrivée de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g.*
2. *Si $f : E \to F$ est une bijection, de bijection réciproque f^{-1}, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$, où si A est une partie de $\mathbb{R}$ $\mathrm{id}_A : A \to A$ est la fonction identité de l'ensemble A, définie pour tout $x \in A$ par $\mathrm{id}_A(x) = x$.*

2.5 Propriétés des fonctions et de leur graphe.

2.5.1 Fonction majorée, minorée, bornée.

Définition 2.30. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **majorée** *si $f(E)$ est majoré, c'est-à-dire*

$$f \text{ majorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leqslant M.$$

2. *On dit que f est* **minorée** *si $f(E)$ est minoré, c'est-à-dire*

$$f \text{ minorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geqslant m.$$

3. *On dit que f est* **bornée** *si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire*

$$f \text{ bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Remarque 2.31. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est majorée si et seulement si son graphe se situe au-dessous d'une droite horizontale, et est minorée si et seulement si son graphe si situe au-dessus d'une droite horizontale.*

2.5.2 Monotonie.

Définition 2.32. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **croissante** *sur I si*

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

2. *On dit que f est* **décroissante** *sur I si*

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

4. $g \circ f$ se lit « g rond f»

3. *On dit que f est* **strictement croissante** *sur I si*
$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$
4. *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur I si*
$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
5. *On dit que f est* **monotone** *sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.*
6. *On dit que f est* **strictement monotone** *sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.*

Remarque 2.33. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a les équivalences suivantes :*

1. *f est croissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente positive.*
2. *f est décroissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente négative.*
3. *f est strictement croissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente strictement positive.*
4. *f est strictement décroissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente strictement négative.*

2.5.3 Parité et périodicité.

Proposition 2.34. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Si l'on définit la fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_1(x) = -f(x)$, alors le graphe de f_1 est obtenu à partir de celui de f par symétrie axiale par rapport à l'axe horizontale (Ox).*
2. *Si l'on définit la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_2(x) = f(-x)$, alors le graphe de f_2 est obtenu à partir de celui de f par symétrie axiale par rapport à l'axe verticale (Oy).*
3. *Si l'on définit la fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_3(x) = -f(-x)$, alors le graphe de f_3 est obtenu à partir de celui de f par symétrie centrale par rapport à l'origine O.*

Définition 2.35. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à O (c'est-à-dire tel que $x \in I$ si et seulement si $-x \in I$), et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **paire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est* **impaire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$.*

Corollaire 2.36. *Si I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à O et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors*

1. *f est paire si et seulement si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe verticale (Oy),*
2. *f est impaire si et seulement si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine O.*

Définition 2.37. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. On dit que f est* **périodique** *de période T si*
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Proposition 2.38. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. f est périodique de période T si et seulement si le graphe de f est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire engendrant l'axe horizontale (Ox).*

2.6 Limite en un point, continuité, dérivabilité.

Les notions de limite et continuité de fonctions seront abordées plus en détails dans le chapitre 5, celle de dérivabilité sera abordée plus en détails dans le cours d'Analyse 2.

2.6.1 Limite en un point.

Définition 2.39. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$* [5]*, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou d'un bord de I et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite ℓ au point x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple 2.40. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^2$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.*

2.6.2 Continuité.

Définition 2.41. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.*

1. *Pour $x_0 \in I$, on dit que f est* **continue** *en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
2. *On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Exemple 2.42. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, f est continue sur $\mathbb{R}$.*

2.6.3 Dérivabilité.

Définition 2.43. *Soient I in intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ qui n'est pas un bord de I. On dit que f est* **dérivable** *au point x_0 si la fonction taux d'accroissement $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite au point x_0. Cette limite est appelée* **dérivée de f au point** *x_0 et est notée $f'(x_0)$.*

Remarque 2.44. *Si une fonction f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente à $\mathrm{Gr}(f)$ au point $(x_0, f(x_0))$.*

Les résultats suivants seront démontrés dans le cours d'Analyse 2.

Proposition 2.45. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de I.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
4. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Proposition 2.46. *Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$.*

1. *$f + g$ est dérivable en x et*
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$
2. *fg est dérivable en x et*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
3. *Si g ne s'annule pas en x, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Proposition 2.47. *Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions et $x \in I$ tel que f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

5. Pour deux ensembles A et B, l'union de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Fonctions polynomiales

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \end{array}$$

est une **fonction polynomiale de degré** n. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée satisfaisant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Cas particuliers :

1. lorsque $n = 0$ on obtient les **fonctions constantes** (pour $a \in \mathbb{R}$) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}.$$

   Le graphe de f défini ainsi est une droite horizontale.

2. lorsque $n = 1$ on obtient les **fonction affines** (pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}.$$

   Le graphe de f défini ainsi est une droite, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.

3. lorsque $n = 2$ on obtient les **fonctions trinôme** (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}.$$

   Le graphe de f défini ainsi est une parabole.

3.2 Fonction partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier, noté $\mathrm{E}(x)$ et appelé **partie entière de** x, vérifiant

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

$\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, $\mathrm{E}(x) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à x.

Exemples 3.1. *On a* $\mathrm{E}(1) = 1$, $\mathrm{E}(\pi) = 3$, $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.

On définit la **fonction partie entière** comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{E} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{E}(x) \end{array}.$$

E est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement, est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$, et dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Remarque 3.2. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{E}(x) - x \end{array}.$$

est périodique de période 1 *sur* $\mathbb{R}$.

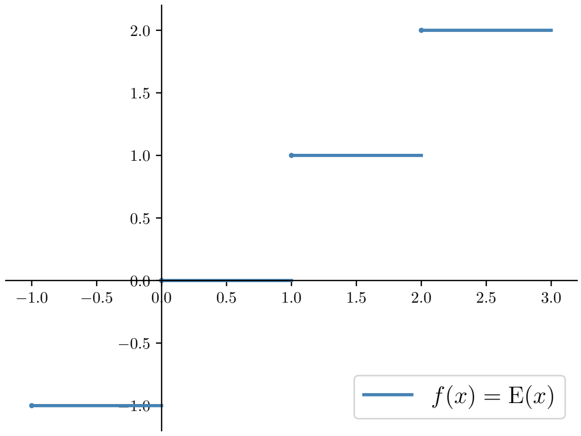


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction partie entière.

3.3 Fonctions trigonométriques

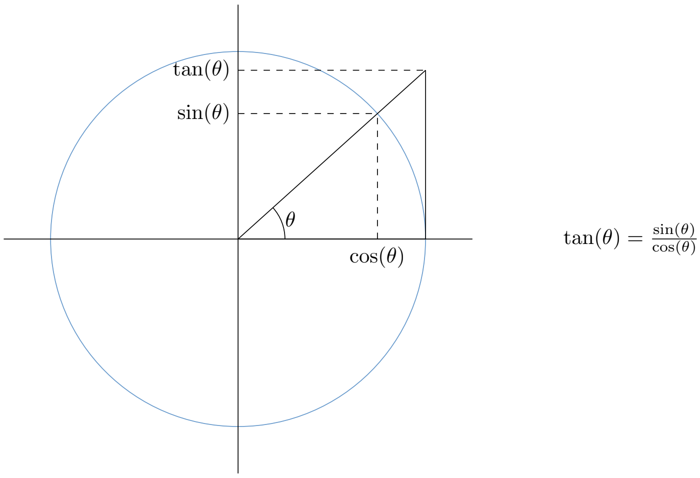


FIGURE 3.2 – Définition géométrique des fonction cos, sin et tan à l'aide d'un cercle de rayon 1.

Proposition 3.3. *Les fonctions* cos, sin *et* tan *ont les propriétés suivantes.*

	cos	sin	tan
Domaine de définition :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
Parité :	*paire*	*impaire*	*impaire*
Période :	2π	2π	π
Dérivée :	$-\sin$	$\cos$	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

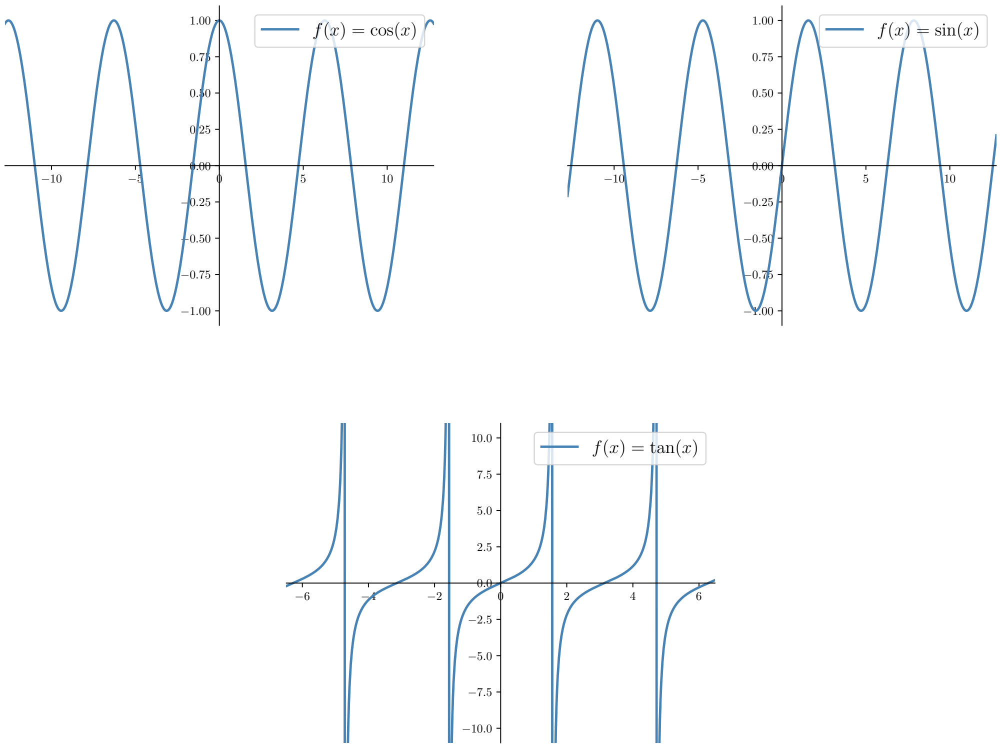


FIGURE 3.3 – Graphes des fonctions cos, sin et tan.

Les formules suivantes (et d'autres) sont démontrées dans le cours d'Algèbre 1.

Proposition 3.4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \\ &\cos(-x) = \cos x, & &\sin(-x) = -\sin x, \\ &\cos(\pi - x) = -\cos x, & &\sin(\pi - x) = \sin x, \\ &\cos(\pi + x) = -\cos x, & &\sin(\pi + x) = -\sin x, \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, & &\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, & &\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Proposition 3.5. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a. \end{aligned}$$

En particulier, pour $a = b$ on a

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \\ \sin(2a) &= 2 \cos a \sin a. \end{aligned}$$

Remarque 3.6. *Les fonctions* cos *et* sin *prennent les valeurs remarquables suivantes.*

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*N on défini*

On remarque que pour la fonction cos *on pourrait écrire dans l'ordre* $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$.

3.4 Fonctions trigonométriques réciproques

On remarque que les fonctions suivantes sont bijectives :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos : [0,\pi] \to [-1,1], \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}.$$

On peut définir leur bijection réciproque.

Définition 3.7. 1. *On appelle* **arc-sinus** *et on note* $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \textit{et} \quad \sin(\arcsin y) = y \quad \forall y \in [-1,1].$$

2. *On appelle* **arc-cosinus** *et on note* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction cosinus à* $[0,\pi]$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0,\pi] \quad \textit{et} \quad \cos(\arccos y) = y \quad \forall y \in [-1,1].$$

3. *On appelle* **arc-tangente** *et on note* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \textit{et} \quad \tan(\arctan y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.8. *Attention, les égalités* $\arccos(\cos x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$ *et* $\arctan(\tan x) = x$ *ne sont pas vraies pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Par exemple* $\arccos(\cos(3\pi)) = \arccos(-1) = \pi$.

Proposition 3.9.

1. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et satisfait, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et satisfait, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et satisfait, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

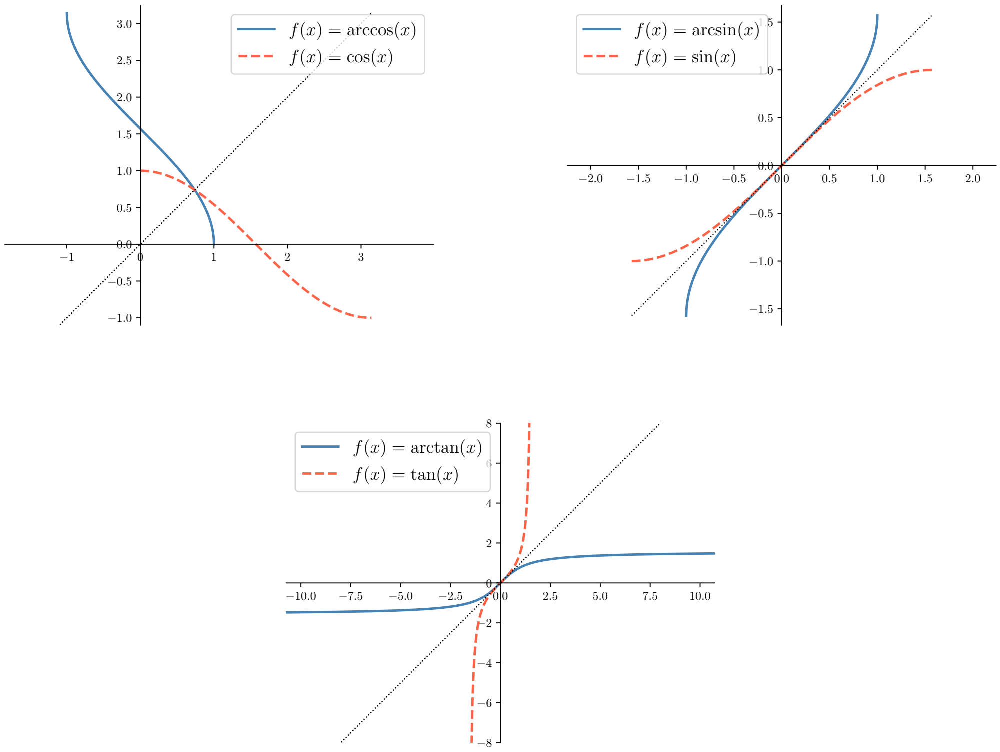


FIGURE 3.4 – Graphes des fonctions arccos, arcsin et arctan.

Démonstration. On admet que ces fonctions sont dérivables (elles sont dérivables car fonctions réciproques de fonctions dérivables de dérivée ne changeant pas de signe, ce résultat sera démontré dans le cours d'Analyse 2).

Calculons la dérivée de arcsin. Pour $x \in]-1,1[$ on a l'identité

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

En dérivant on obtient

$$\arcsin'(x)\cos(\arcsin x) = 1.$$

On a de plus $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$ et comme $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos(\arcsin x) > 0$ et donc

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

ce qui donne le résultat.

Le calcul de la dérivée de arccos est similaire. Calculons maintenant la dérivée de arctan. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a l'identité

$$\tan(\arctan x) = x.$$

En dérivant, on obtient

$$\arctan'(x)(1 + \tan^2(\arctan x)) = 1,$$

et comme $\tan^2(\arctan x) = x^2$ et $1 + x^2 > 0$ on en déduit bien

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

3.5 Fonctions exponentielle et logarithme

On admet le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Il existe une unique fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $f(0) = 1$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** *et est notée*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to &]0, \infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}.$$

Remarque 3.11. *On note souvent* e^x *au lieu de* $\exp(x)$.

Proposition 3.12. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1. $$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$

2. $$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)},$$

3. $$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

Proposition 3.13. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Remarque 3.14. *Comme on le verra dans le chapitre 5,* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *signifie*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M,$$

alors que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ *signifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 3.15. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, c'est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, \infty[$.

On peut donc définir la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

Définition 3.16. *On définit la fonction* **logarithme népérien** *et on note* $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *la bijection réciproque de la fonction exponentielle. On a donc les égalités suivantes :*

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \exp(\ln(y)) = y \quad \forall y \in]0, \infty[.$$

Proposition 3.17. *Pour tous* $x, y \in]0, \infty[$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1. $$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

2. $$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),$$

3. $$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

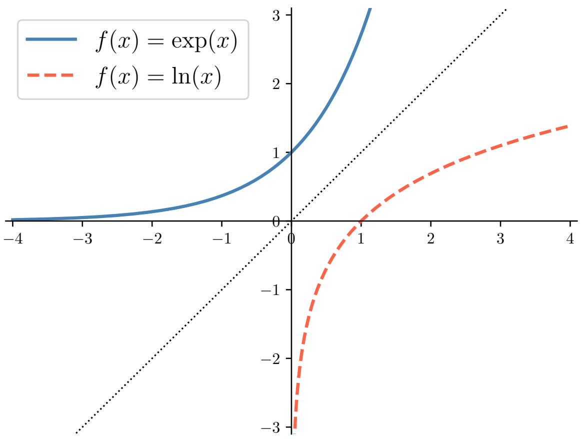


FIGURE 3.5 – Graphes des fonctions exp et ln.

Proposition 3.18. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Remarque 3.19. *Si I est un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un bord de I, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = -\infty$ signifie*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \leqslant M.$$

Proposition 3.20. *La fonction* ln *est dérivable et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$, *avec pour tout* $x \in]0, +\infty[$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Comme pour les fonction trigonométriques réciproques on admet que ln est dérivable. Calculons sa dérivée. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $\exp(\ln(x)) = x$, et donc en dérivant on obtient

$$\ln'(x) \exp(\ln(x)) = 1,$$

ce qui implique le résultat puisque $\exp(\ln(x)) = x > 0$. □

3.6 Fonctions hyperboliques

Définition 3.21. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions* **cosinus hyperbolique** *(notée* cosh*),* **sinus hyperbolique** *(notée* sinh*) et* **tangent hyperbolique** *(notée* tanh*) comme suit : pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 3.22. *Les fonctions* cosh, sinh *et* tanh *ont les propriétés suivantes.*

	cosh	sinh	tanh
Domaine de définition :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité :	*paire*	*impaire*	*impaire*
Dérivée :	sinh	cosh	$1 - \tanh^2$
Limite en $+\infty$:	$+\infty$	$+\infty$	1
Limite en $-\infty$:	$+\infty$	$-\infty$	-1

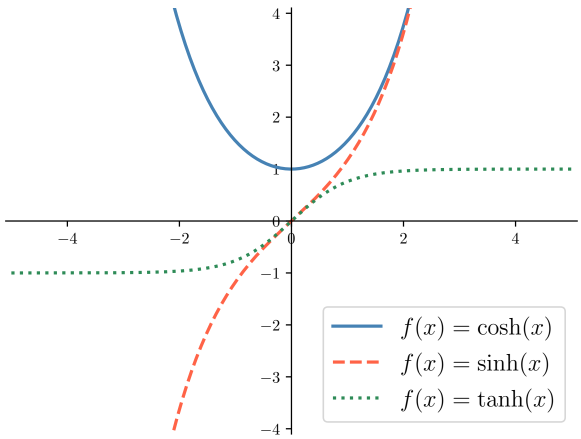


FIGURE 3.6 – Graphes des fonctions cosh, sinh et tanh.

Proposition 3.23. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
&\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \\
&\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \quad \text{et} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}, \\
&\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\
&\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y), \\
&\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1, \\
&\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x).
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première égalité il suffit de voir que pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} = 1.$$

La deuxième ligne est obtenue par un calcul immédiat. Pour la troisième on a pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x)\cosh(y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4},$$

$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4},$$

et donc

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x).$$

Le reste est obtenu à l'aide de calculs similaires.

□

3.7 Fonctions puissance

Définition 3.24.

1. *Pour $a \in \mathbb{N}$ on définit*

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ fois}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec la convention $x^0 = 1$. La fonction $x \mapsto x^a$ est polynomiale, elle est paire si a est pair, impaire si a est impair.

2. *Pour $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ on définit*
$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$
3. *Si $a = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, x^a est la racine n-ième de x (l'unique y tel que $y^n = x$). Si n est pair elle est définie pour tout $x \geqslant 0$, si n est impair elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
4. *Si $a \in \mathbb{R}$ on définit*
$$x^a = \exp(a \ln(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 3.25. *La définition du point 4. généralise les définitions des points précédents lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effet on a par exemple, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{N}$,*
$$\exp(a \ln(x)) = (\exp(\ln(x)))^a = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x.$$

Proposition 3.26. *Les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas, pour $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$ tels que x^a, x^b, x^{ab} et y^a existent (et $x \neq 0$ pour le denier point) :*
$$(1)^a = 1, \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

Proposition 3.27. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.*

Remarque 3.28. *Il faut faire attention à ne pas confondre les fonctions puissances définies sur $]0, \infty[$ par $f(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$ avec $a \in \mathbb{R}$, et les fonctions g, variantes de la fonction exponentielle, définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = b^x = \exp(\ln(b)x)$, pour $b > 0$.*

3.8 Croissance comparée

La résultat suivant sera démontré dans le cadre des suites dans le chapitre 4.

Théorème 3.29. *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln(x))^c} = +\infty,$$
et
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\ln(x))^c} = +\infty.$$

Chapitre 4

Suites réelles

4.1 Définitions

Définition 4.1. *On appelle suite réelle une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction qui associe à tout $n \in \mathbb{N}$ le réel u_n.*

Exemple 4.2. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n + 1.$$

Définition 4.3. *Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel λ on peut définir*

1. *la* **somme** $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*
2. *le* **produit** $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*
3. *la* **multiplication par un réel** $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Remarque 4.4. *On peut ne pas définir une suite sur $\mathbb{N}$ mais sur $\mathbb{N}^*$, ou sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2... On note alors $(u_n)_{n \geqslant 1}$, $(u_n)_{n \geqslant 2}$...*

Définition 4.5. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est*

1. **croissante** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n,$$
2. **décroissante** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n,$$
3. **monotone** *si elle est croissante ou décroissante,*
4. **majorée** *si*
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M,$$
5. **minorée** *si*
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m,$$
6. **bornée** *si elle est majorée et minorée.*

Remarque 4.6. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si $m \geqslant n$ on a $u_m \geqslant u_n$. A l'inverse si elle est décroissante et si $m \geqslant n$ on a $u_m \leqslant u_n$.*

Définition 4.7. *Une propriété $P(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$ est dite vraie* **à partir d'un certain rang** *si*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow P(n) \text{est vraie.}$$

Exemple 4.8. *On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 10n.$$

On a $u_0 = 1$, $u_1 = -8$, $u_2 = -16$, donc cette suite n'est pas croissante. Mais pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 2^n - 10n - 10 - (2^n - 10n) = 2^n - 10,$$

et comme $2^n - 10 \geqslant 0$ dès que $n \geqslant 4$, cette suite est croissante à partir d'un certain rang.

4.2 Suites classiques

Définition 4.9. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **arithmétique de progression** $r \in \mathbb{R}$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.10. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de progression* $r \in \mathbb{R}$ *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r.$$

Définition 4.11. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}^*$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = qu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.12. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique* $q \in \mathbb{R}$ *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = q^n u_0, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}u_0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 4.13. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **arithmético-géométrique de paramètres** $q \in \mathbb{R}^*$ **et** $r \in \mathbb{R}$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = qu_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.14. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmético-géométrique de paramètres* $q \in \mathbb{R}^*$ *et* $r \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $q = 1$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique.*
2. *Si* $q \neq 1$, *l'équation d'inconnue* $a \in \mathbb{R}$
$$a = qa + r$$
a comme unique solution
$$a = \frac{r}{1-q},$$
et on a
$$u_{n+1} - a = qu_n + r - (qa + r) = q(u_n - a),$$
donc la suite $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* q. *Ainsi pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = a + u_n - a = a + q^n(u_0 - a),$$
et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \big(a + (u_k - a)\big) = (n+1)a + \frac{q^{n+1}-1}{q-1}(u_0 - a).$$

Remarque 4.15. *Les suites classiques présentées dans cette section sont des exemples simples de suites dites récurrentes d'ordre* 1, u_{n+1} *étant défini comme une fonction de* u_n. *Les suites récurrentes apparaissent naturellement dans le calcul de complexité d'algorithmes définis eux-même par récurrence, la complexité d'un algorithme correspondant au nombre d'opérations élémentaires nécessaires à sa mise en œuvre.*

Par exemple, pour calculer $n!$, *on peut calculer* $(n-1)!$, *et le multiplier par* n. *Mais pour calculer* $(n-1)!$ *on peut calculer* $(n-2)!$ *et le multiplier par* $n-1$, *etc... Il s'agit d'un algorithme récursif. Si l'on note* u_n *le nombre d'opérations (ici multiplications) nécessaires pour calculer* $n!$, *on a simplement* $u_{n+1} = u_n + 1$ *et* $u_1 = 0$, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite arithmétique.*

Pour l'exemple classique des tours de Hanoï (voir la page Wikipedia dédiée), la complexité est arithmético-géométrique, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

4.3 Convergence de suite

Définition 4.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **tend vers** *ℓ (ou a pour limite ℓ) si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque 4.17.

1. *L'ordre est important dans les quantificateurs, dans la définition précédente N dépend de ε.*
2. *Comme $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ équivaut à $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ contient les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.*
3. *Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ si*

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Exemple 4.18. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0. En effet, pour $\varepsilon > 0$ on a $|u_n - 0| = \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$, on peut donc prendre $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.*

Définition 4.19.

1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge** *(ou est convergente) s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si*

$$\exists\ell \in \mathbb{R}, \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui équivaut à

$$\exists\ell \in \mathbb{R}, \forall\varepsilon > 0, \quad \{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est de cardinal fini.}$$

2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **diverge** *(ou est divergente) si elle n'est pas convergente. Ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si et seulement si*

$$\forall\ell \in \mathbb{R}, \exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon,$$

ce qui équivaut à

$$\forall\ell \in \mathbb{R}, \exists\varepsilon > 0, \quad \{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est de cardinal infini.}$$

Exemple 4.20. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet, pour tout $\ell \geqslant 0$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$|u_{2k+1} - \ell| = |-1 - \ell| = 1 + \ell > \frac{1}{2},$$

donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > 1/2\}$ est de cardinal infini. De même, pour $\ell \leqslant 0$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|u_{2k} - \ell| = |1 - l| = 1 - l > \frac{1}{2},$$

et donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > 1/2\}$ est de cardinal infini.

Théorème 4.21 (Unicité de la limite)**.** *La limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique. Autrment dit si pour $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers ℓ_1 et ℓ_2. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \varepsilon$, puisque que cela implique bien que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe N_1 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe N_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Définissions $N = \max(N_1, N_2)$. Comme $N \geqslant N_1$ et $N \geqslant N_2$ on en déduit bien, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_N - (\ell_2 - u_N)| \\ &\leqslant |\ell_1 - u_N| + |\ell_2 - u_N| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.22. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant 1.$$

Donc, par inégalité triangulaire inversée, pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n| - |\ell| \leqslant ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant 1,$$

et ainsi, pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n| \leqslant |\ell| + 1$. De plus l'ensemble $\{|u_n| : n \in \{0, \dots, N-1\}\}$ est de cardinal fini et est donc majoré par $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|)$. Au final on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leqslant \max(M, |\ell| + 1).$$

□

4.4 Opérations sur les limites

Théorème 4.23. *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ et deux réels a et b. Alors*

$$au_n + bv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\ell_1 + b\ell_2.$$

Démonstration. Ce résultat est évident si $a = b = 0$. Supposons maintenant que $|a| + |b| > 0$ et considérons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a| + |b|}.$$

De même, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a| + |b|}.$$

Mais alors, en définissant $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$ on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |au_n + bv_n - (a\ell_1 + b\ell_2)| &= |a(u_n - \ell_1) + b(v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |a||u_n - \ell_1| + |b||v_n - \ell_2| \\ &\leqslant |a|\frac{\varepsilon}{|a| + |b|} + |b|\frac{\varepsilon}{|a| + |b|} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.24. *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$. Alors*

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \ell_2.$$

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est bornée et il existe donc $M > 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|l_2| + M},$$

et de même, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{M + |l_2|}.$$

En définissant $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$ on obtient

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\
&\leqslant |u_n||v_n - \ell_2| + |\ell_2||u_n - \ell_1| \\
&\leqslant M \frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} + |\ell_2| \frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.25. *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $\ell \neq 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors u_n est non nul à partir d'un certain rang et on a de plus*

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que u_n est non nul à partir d'un certain rang. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant N_1$ on a

$$|\ell| - |u_n| \leqslant ||\ell| - |u_n|| \leqslant |\ell - u_n| \leqslant \frac{|\ell|}{2},$$

et donc $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$ pour tout $n \geqslant N_1$. On a donc bien montré que u_n est non nul à partir d'un certain rang.

Montrons maintenant que $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$. Considérons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell^2 \varepsilon}{2}.$$

En définissant $N = \max(N_1, N_2)$ on obtient alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|} \leqslant \frac{\frac{\ell^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \cdot |\ell|} \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarque 4.26. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$ (c'est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire inverse).*

4.5 Limites de suites et inégalités

Théorème 4.27. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ℓ_1, ℓ_2 des réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$. Alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\ell_2 - \ell_1 \geqslant -\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n - \ell_1 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow v_n - \ell_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, en définissant $N = \max(N_1, N_2)$, on a $\ell_2 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} + v_N$ et $-\ell_1 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} - v_N$, ce qui implique, comme $v_N - u_N \geqslant 0$,

$$\ell_2 - \ell_1 \geqslant -\varepsilon + v_N - u_N \geqslant -\varepsilon.$$

□

Remarque 4.28. *Attention ce résultat n'est pas vrai pour des inégalités strictes, par exemple $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.*

Corollaire 4.29. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

1. *S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \leqslant M$.*
2. *S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \geqslant m$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent en prenant une des deux suites constante.

□

Théorème 4.30 (Théorème dit « des gendarmes »). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exemple 4.31. *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$. Alors en définissant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{1}{n+1}$ et $w_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n - \ell \geqslant -\varepsilon,$$

et

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow w_n - \ell \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon,$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. □