Licence 1 Mathématiques Informatique.

ANALYSE 1 POUR L'INFORMATIQUE

Christophe Poquet

Année universitaire 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

est *l'ensemble des entiers naturels*. Si l'on enlève le 0 on définit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls*.

1.1.2 Les entiers relatifs

En ajoutant les entiers négatifs on définit *l'ensemble des entiers relatifs* par

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

De même, si l'on enlève le 0, on définit $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ *l'ensemble des entiers relatifs non nuls*.

Remarque 1.1.

1. *On remarque que l'ensemble* $\mathbb{N}$ *est* **inclus** *dans l'ensemble* $\mathbb{Z}$*, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

où le symbole $\subset$ *se lit « est inclus dans ». En effet, tout élément de* $\mathbb{N}$ *est également élément de* $\mathbb{Z}$*, ce que l'on peut écrire de la manière suivante :*

$$\textit{si} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{alors} \quad n \in \mathbb{Z},$$

où le symbole $\in$ *se lit « appartient à ».*

2. *On voit immédiatement que l'inclusion réciproque est fausse, c'est-à-dire* $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$*, puisque par exemple* $-1 \in \mathbb{Z}$ *alors que* $-1 \notin \mathbb{N}$*.*
3. *Attention à ne pas confondre les symboles* $\subset$ *et* $\in$ *!*

1.1.3 Les nombres rationnels

On définit *l'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,:\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarque 1.2.

1. *Puisque tout entier relatif* n *peut être écrit sous la forme*
$$n = \frac{n}{1},$$
on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. *Un nombre rationnel peut être représenté par différentes fractions, par exemple* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \ldots$ *Plus précisément, pour* $a, a' \in \mathbb{Z}$ *et* $b, b' \in \mathbb{Z}^*$, *on a*
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si et seulement si} \quad ab' = a'b.$$
Attention, l'expression « P si et seulement si Q », que l'on peut abréger en « P ssi Q » ou « P $\Leftrightarrow$ *Q » (voir le cours d'Algèbre 1), signifie deux choses : « si P est vraie alors Q est vraie » et « si Q est vraie alors P est vraie ».*

1.1.4 Les nombres décimaux

On définit *l'ensemble des nombres décimaux* $\mathbb{D}$ de la manière suivante :
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \,:\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Il s'agit des nombres ayant une suite **finie** de chiffres à droite de la virgule.

Remarque 1.3.

1. *Tous les éléments de* $\mathbb{D}$ *peuvent être écrit sous forme de fraction, et donc* $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. *L'inclusion réciproque est fausse, puisque certaines fractions ne peuvent être écrites qu'avec une infinité de chiffres après la virgule, comme par exemple*
$$\frac{1}{3} = 0.3333333333333333333333333\ldots$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ donne un rôle privilégié au nombre 10 (les dix doigts des mains). Du point de uvue des mathématiciens, les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont plus importants.

1.1.5 Les nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est composée de

— un signe $+$ ou $-$ (généralement omis lorsque c'est le $+$),
— une suite finie de chiffres entre 0 et 9, ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0,
— une virgule,
— une suite finie ou infinie de chiffres entre 0 et 9.

Exemples 1.4. *Par exemple* 0, 4, -10.3, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π *sont des nombres réels.*

Remarque 1.5.

1. *Attention avec cette définition un réel ne s'écrit pas de manière unique, par exemple* $1 = 1.0$, $0 = 0.0 = -0 = -0.00$, $1 = 0.99999999999\ldots$
2. *On a l'inclusion* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, *mais l'inclusion réciproque est fausse, on ne peut par exemple pas écrire* $\sqrt{2}$ *comme* $\frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}^*$ *(voir le cours d'Algèbre 1).*

1.2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels

Dans l'enfance on apprend à additionner, multiplier et comparer les entiers. Ceci s'étend aux nombres réels (résultat admis, fastidieux à démontrer).

Proposition 1.6. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ (ou $\times$) qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et ont les propriétés suivantes :*

1. **commutativité :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a+b=b+a \quad \textit{et} \quad a\cdot b=b\cdot a,$$
2. **associativité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \textit{et} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,$$
3. **distributivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ on a*
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$$
4. **éléments neutres :** *pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a*
$$a+0=a \quad \textit{et} \quad a\cdot 1=a,$$
5. **élément absorbant :** *pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a*
$$a\cdot 0=0.$$

Proposition 1.7. *On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leqslant$ qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. **réflexivité :** *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$a\leqslant a,$$
2. **antisymétrie :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$,*
$$\textit{si} \quad a\leqslant b \quad \textit{et} \quad b\leqslant a, \quad \textit{alors} \quad a=b,$$
3. **transitivité :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\textit{si} \quad a\leqslant b \quad \textit{et} \quad b\leqslant c, \quad \textit{alors} \quad a\leqslant c,$$
4. **ordre total :** *pour tous a,b dans $\mathbb{R}$,*
$$a\leqslant b \quad \textit{ou} \quad b\leqslant a,$$
5. **compatibilité avec l'addition :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\textit{si} \quad a\leqslant b \quad \textit{alors} \quad a+c\leqslant b+c,$$
6. **compatibilité avec la multiplication :** *pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$,*
$$\textit{si} \quad a\leqslant b \quad \textit{et} \quad c\geqslant 0, \quad \textit{alors} \quad a\cdot c\leqslant b\cdot c.$$

Remarque 1.8. *En mathématiques le « ou » est inclusif : « A ou B » signifie soit A, soit B, soit les deux.*

$a\leqslant b$ se lit « a inférieur ou égal à b ». On écrit de plus, pour a, b dans $\mathbb{R}$
- $a\geqslant b$ (qui se lit « a supérieur ou égal à b ») si $b\leqslant a$,
- $a<b$ (qui se lit « a strictement inférieur à b ») si $a\leqslant b$ et $a\neq b$,
- $a>b$ (qui se lit « a strictement supérieur à b ») si $b<a$.

On remarque que le contraire de $a\leqslant b$ est $a>b$.

Remarque 1.9.

1. *On ne peut pas soustraire des inégalités : on a $2\leqslant 3$ et $1\leqslant 4$ mais $2-1=1$ n'est pas inférieur ou égal à $3-4=-1$!*
2. *La multiplication par un réel négatif change le sens de l'inégalité : si a, b, c sont des réels,*
$$\textit{si} \quad a\leqslant b \quad \textit{et} \quad c\leqslant 0, \quad \textit{alors} \quad a\cdot c\geqslant b\cdot c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 1.10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la* **valeur absolue** *de x, notée $|x|$, de la manière suivante :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.11. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max(-a, a),$$
2. *pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a| = 0 \quad si\ et\ seulement\ si \quad a = 0,$$
3. *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$
4. **inégalité triangulaire :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$
5. **inégalité triangulaire inverse :** *pour tous a, b dans $\mathbb{R}$ on a*
$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue.

Démontrons le point 4. Considérons deux réels a et b. D'après 1) on a $|a+b| = \max(a+b, -a-b)$. Mais comme $a \leqslant \max(-a, a) = |a|$ et $b \leqslant |b|$ on a $a + b \leqslant |a| + |b|$. De même, comme $-a \leqslant |a|$ et $-b \leqslant |b|$ on a $-a - b \leqslant |a| + |b|$. Ainsi

$$|a + b| = \max(a + b, -a - b) \leqslant |a| + |b|.$$

Finalement démontrons le point 5). Considérons à nouveaux deux réels a et b. D'une part d'après 4) on a $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$ et donc $|a-b| \geqslant |a|-|b|$. D'autre part on a $|b| = |b-a+a| \leqslant |b-a|+|a|$ et donc $|a - b| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. On en déduit bien

$$|a - b| \geqslant \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = ||a| - |b||.$$

□

1.4 Intervalles

Intuitivement, un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ».

Définition 1.12 (Intervalles de $\mathbb{R}$)**.** *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, pour tous x, y éléments de I, tout réel z vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$ est également un élément de I.*

Proposition 1.13. *Les intervalles I de $\mathbb{R}$ ont l'une des formes suivantes :*

1. $\mathbb{R}$,
2. $\emptyset$, **l'ensemble vide**, *qui ne contient aucun élément,*
3. $\{a\}$, **un singleton**, *avec $a \in \mathbb{R}$,*
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, **un segment** , *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
5. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ *ou* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *avec a, b réels vérifiant $a < b$,*
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $]-\infty, a] == \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ *ou* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, *avec a réel.*

Remarque 1.14. *Dans les points 4., 5. et 6. de la proposition précédente les réels a et b sont appelés les* **bords** *de l'intervalle.*

1.5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.15. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de A.*

1. *On dit que a est* **le plus grand élément de** *A (ou* **maximum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \leqslant a$,*
2. *On dit que a est* **le plus petit élément de** *A (ou* **minimum** *de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \geqslant a$.*

S'il existe, le plus grand élément de A est unique, on le note $\max(A)$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique, on le note $\min(A)$.

Exemples 1.16.

1. *Une partie finie A de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé d'un nombre fini d'éléments) a toujours un plus grand élément.*
2. *1 est le plus grand élément de $[0, 1]$.*
3. *$\mathbb{N}$ et $[0, 1[$ n'admettent pas de plus grand élément.*

Définition 1.17. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et m un réel.*

1. *On dit que m est un* **majorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \geqslant a$.*
2. *On dit que m est un* **minorant** *de A si tout élément a de A vérifie $m \leqslant a$.*

Exemples 1.18.

1. *1 et 4 sont des majorants de $[0, 1]$ et $[0, 1[$,*
2. *$\mathbb{N}$ n'a pas de majorant.*

Définition 1.19. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est*

1. **majorée** *si elle admet un majorant,*
2. **minorée** *si elle admet un minorant,*
3. **bornée** *si elle admet un majorant et un minorant.*

Exemples 1.20.

1. *$[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont bornés,*
2. *$[0, +\infty[$ est minoré mais n'est pas borné.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.21 (Théorème de la borne supérieure)**.** *Toute partie A de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet un plus petit majorant, appelé la* **borne supérieure de** *A et noté $\sup(A)$.*

Exemple 1.22. *On a $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1[) = 1$.*

Remarque 1.23. *Ce théorème n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$: l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ est majoré mais n'admet pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.*

De même, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors elle admet un plus grand minorant, appelée **borne inférieure de** A et noté $\inf(A)$.

Par convention, si A n'est pas majorée on note $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée on note $\inf(A) = -\infty$.

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.24 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Alors $M = \sup(A)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M]$ [1] est non vide.*

1. Pour deux ensembles A et B, $A \cap B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et B.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $M = \sup(A)$ et considérons $\varepsilon > 0$. Alors, comme $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, puisque M est le plus petit des majorants. Il existe donc un élément a de A tel que $a > M - \varepsilon$. Puisque M est un majorant on a $a \leqslant M$, et donc $a \in]M - \varepsilon, M] \cap A$. L'ensemble $]M - \varepsilon, M] \cap A$ est donc non vide.

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M]$ est non vide. On veut montrer que si $m < M$ alors m n'est pas un majorant de A, puisque dans ce cas M est bien le plus petit majorant de A. Fixons $m < M$ et posons $\varepsilon = M - m > 0$. Par hypothèse l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M] = A \cap]m, M]$ est non vide, et il existe donc un élément a de A qui vérifie $m < a$. m n'est donc pas un majorant de A. $\square$

Chapitre 2

Fonctions réelles

2.1 Fonctions et graphes

Définition 2.1. *Une* **application** f *d'un ensemble de départ* E *dans un espace d'arrivée* F *est un procédé qui associe à chaque élément* x *de* E *un unique élément* $f(x)$ *de* F*. Une telle application est notée*

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle parfois E *le domaine de* f *et* F *le codomaine de* f*.*

Définition 2.2. *On appelle* **fonction réelle d'une variable réelle** *toute application* f *ayant pour ensemble de départ une partie* A *de* $\mathbb{R}$*, et ensemble d'arrivée une partie* B *de* $\mathbb{R}$ *:*

$$f: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle l'ensemble A *le* **domaine de définition** *de* f*.*

Remarque 2.3. *Pour simplifier, dans la suite de ce cours, on parlera simplement de fonction pour désigner une fonction réelle d'une variable réelle (les fonctions de plusieurs variables réelles seront par exemple abordées dans des cours ultérieurs).*

Exemples 2.4. *On peut considérer les fonctions suivantes :*

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \qquad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad |\cdot|: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Définition 2.5. *Si* E *et* F *sont deux ensembles, on note* $E \times F$ *le* **produit cartésien** *de* E *et* F*, défini par*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, \, y \in F\}.$$

Remarque 2.6. *Pour un ensemble* E *on écrit* E^2 *plutôt que* $E \times E$*.*

Définition 2.7. *Si* $f : E \to F$ *est une fonction on appelle* **graphe** *de* f *l'ensemble*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Remarque 2.8.

1. *Le graphe d'une fonction réelle est une partie de* $\mathbb{R}^2$*, on peut le représenter par un dessin (voir la figure 2.1).*
2. *Une partie de* A *de* $\mathbb{R}^2$ *est le graphe d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si et seulement si toute droite verticale intersecte* A *en un unique point.*

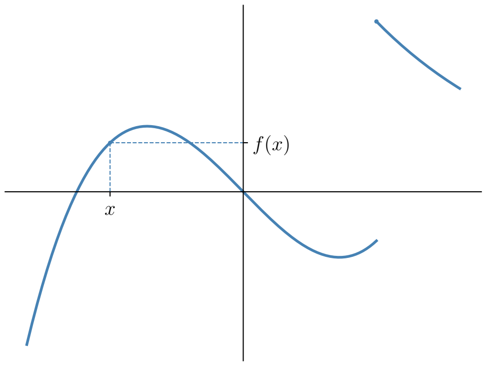


FIGURE 2.1 – Exemple de tracé du graphe d'une fonction réelle.

2.2 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

2.2.1 Image, antécédent.

Définition 2.9. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Si $x \in E$ et $y \in F$ vérifient $y = f(x)$, on dit que y est* **l'image** *de x par f, et que x est* **un antécédent** *de y par f.*

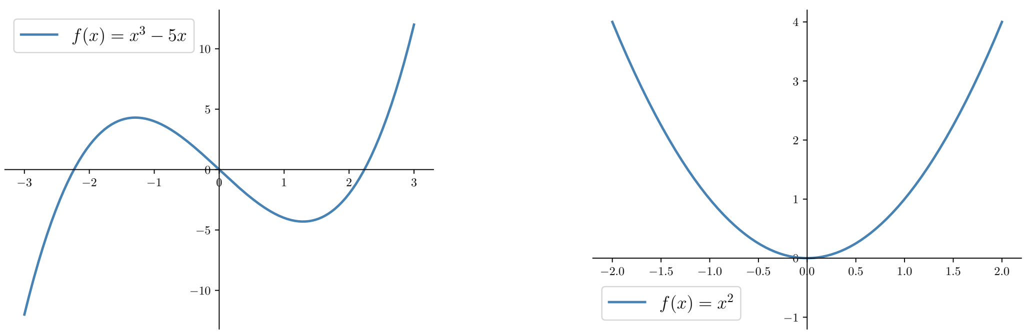
Remarque 2.10. *Si $f : E \to F$, alors chaque $x \in E$ admet une et une seule image par f, alors que $y \in F$ peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par f.*

Exemple 2.11. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, -1 a pour image 1, 2 a pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, alors que -3 n'a pas d'antécédent par f.*

2.2.2 Surjectivité.

Définition 2.12. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **surjective** *(ou une surjection) si tout élément de F admet* **au moins un antécédent**, *autrement dit*[1] *:*

$$f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall y \in F,\, \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\Big).$$



(a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x$ est surjective.

(b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective.

FIGURE 2.2 – Exemples de fonctions surjective/non surjective.

Remarque 2.13. *Lorsque $f : E \to F$, f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$ la droite horizontale passant par $(0, y)$ intersecte* $\mathrm{Gr}(f)$.

1. Le symbole $\forall$ signifie se lit « pour tout », le symbole $\exists$ se lit « il existe ».

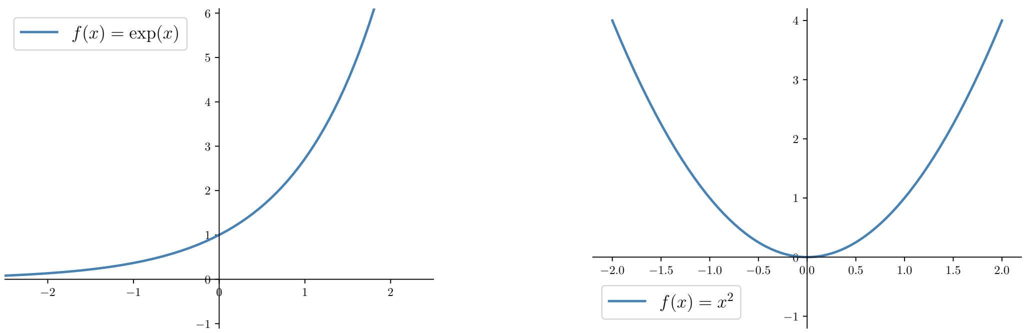
2.2.3 Injectivité.

Définition 2.14. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **injective** *(ou une injection) si tout élément de F admet* **au plus un antécédent**, *autrement dit*[2] *:*

$$f \textit{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall x, x' \in E,\, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big).$$

Remarque 2.15. *De manière équivalente, puisque $P \Rightarrow Q$ équivaut à $(\text{non} Q) \Rightarrow (\text{non} P)$ (voir le cours d'algèbre 1), on a*

$$f \textit{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall x, x' \in E,\, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\Big).$$



(a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$ est injective.

(b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

FIGURE 2.3 – Exemples de fonctions injective/non injective.

Remarque 2.16. *Lorsque $f : E \to F$, f est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte $\mathrm{Gr}(f)$ au plus une fois.*

2.2.4 Bijectivité.

Définition 2.17. *Une fonction $f : E \to F$ est dite* **bijective** *(ou une bijection) si tout élément de F admet* **un unique antécédent**, *autrement dit*[3] *:*

$$f \textit{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall y \in F,\, \exists! x \in E \textit{ tel que } y = f(x)\Big).$$

Remarque 2.18. *Lorsque $f : E \to F$, f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$ la droite horizontale passant par $(0, y)$ intersecte $\mathrm{Gr}(f)$ une et une seule fois.*

Définition 2.19. *Supposons la fonction $f : E \to F$ bijective. En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f on définit une fonction de F dans E. Cette fonction est appelée fonction réciproque de la fonction f, et est notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation suivante :*

$$\forall x \in E,\, \forall y \in F,\, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Remarque 2.20. *Si $f : E \to F$ est bijective de bijection réciproque f^{-1}, alors $f^{-1} : F \to E$ est elle-même bijective de bijection réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$. On a de plus les formules*

$$\forall x \in E,\, \forall y \in F,\, f^{-1}(f(x)) = x \textit{ et } f(f^{-1}(y)) = y.$$

2. Le symbole $\Rightarrow$ est le symbole de l'implication : $P \Rightarrow Q$ signifie « si P est vraie, alors Q est vraie ».
3. Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

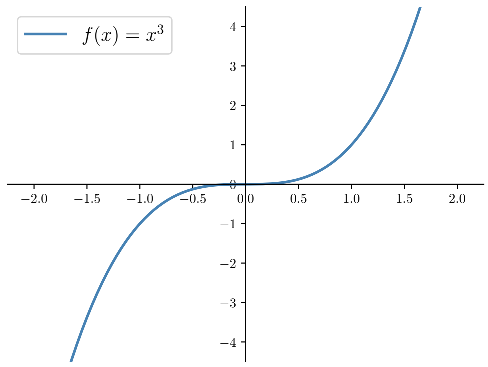


FIGURE 2.4 – La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est bijective.

Remarque 2.21. *Si $f : E \to F$ est bijective de réciproque f^{-1}, alors $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ est le symétrique de $\mathrm{Gr}(f)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. En effet,*

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y = f(x) \text{ et } y \in F) \\ &\Leftrightarrow (y \in F \text{ et } x = f^{-1}(y) \text{ et } x \in E) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathrm{Gr}(f^{-1}).\end{aligned}$$

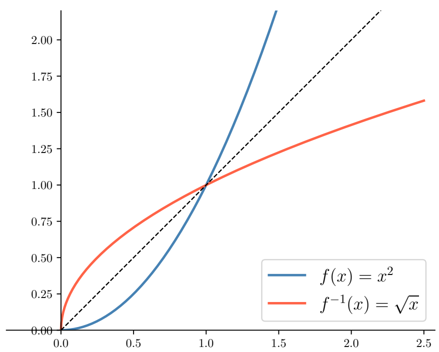


FIGURE 2.5 – La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ a pour fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

2.3 Image directe, image réciproque.

Définition 2.22. *Si $f : E \to F$ est une fonction et A est une partie de E,* **l'image directe** *de A par f, notée $f(A)$, est la partie de F définie par*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

En particulier, pour $A = E$, on appelle **image de** *f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.*

Exemple 2.23. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors $f([0, 1]) = [0, 1]$, $f([-2, 1]) = [0, 4]$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.*

Définition 2.24. *Si $f : E \to F$ est une fonction et B est une partie de F,* **l'image réciproque** *de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est la partie de E définie par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

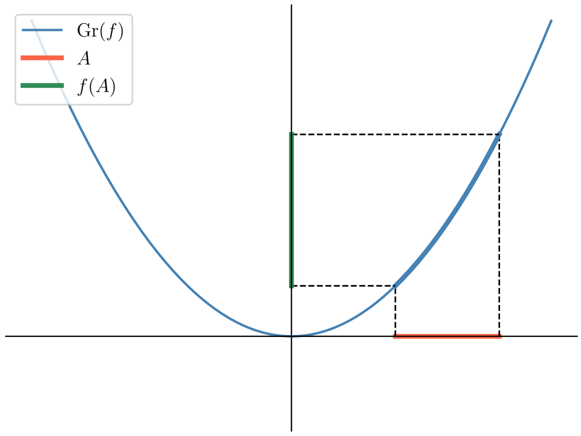


FIGURE 2.6 – Image directe d'une partie A de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle.

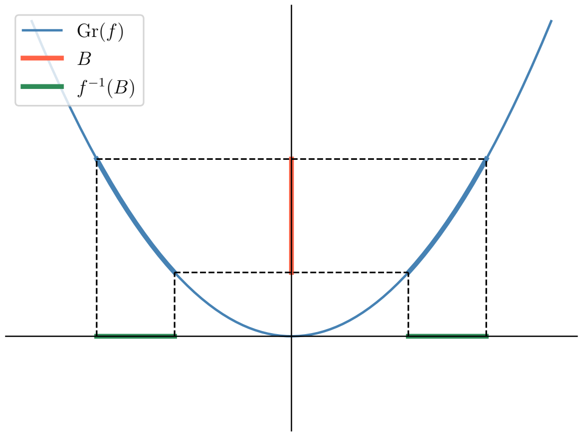


FIGURE 2.7 – Image réciproque d'une partie B de $\mathbb{R}$ par une fonction réelle.

Remarque 2.25.

1. *Attention, cette définition ne suppose pas que f soit bijective !*
2. *Si f est bijective, $f^{-1}(B)$ est l'image directe de B par f^{-1}.*

Exemples 2.26. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$, $f^{-1}([-2,4]) = [-2,2]$.*

2.4 Opérations sur les fonctions.

2.4.1 Somme, produit, quotient.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ayant le même ensemble de départ. On définit

1. leur **somme** :
$$f+g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array},$$
2. leur **produit** :
$$f \cdot g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array},$$

3. et, si g ne s'annule pas sur I, leur **quotient** :

$$\begin{array}{rccc} \frac{f}{g} : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}.$$

2.4.2 Composition.

Définition 2.27. *Si E, F, G sont des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des fonctions, on définit la* **composition** *de f et g, notée $g \circ f$, par*[4]

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Exemple 2.28. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x + 2$, alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$g \circ f(x) = \sin(x) + 2 \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = \sin(x + 2).$$

Remarque 2.29.

1. *Pour pouvoir définir $g \circ f$ il faut que l'ensemble d'arrivée de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g.*
2. *Si $f : E \to F$ est une bijection, de bijection réciproque f^{-1}, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$, où si A est une partie de $\mathbb{R}$ $\mathrm{id}_A : A \to A$ est la fonction identité de l'ensemble A, définie pour tout $x \in A$ par $\mathrm{id}_A(x) = x$.*

2.5 Propriétés des fonctions et de leur graphe.

2.5.1 Fonction majorée, minorée, bornée.

Définition 2.30. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **majorée** *si $f(E)$ est majoré, c'est-à-dire*
$$f \text{ majorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leqslant M.$$
2. *On dit que f est* **minorée** *si $f(E)$ est minoré, c'est-à-dire*
$$f \text{ minorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geqslant m.$$
3. *On dit que f est* **bornée** *si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire*
$$f \text{ bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Remarque 2.31. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est majorée si et seulement si son graphe se situe au-dessous d'une droite horizontale, et est minorée si et seulement si son graphe si situe au-dessus d'une droite horizontale.*

2.5.2 Monotonie.

Définition 2.32. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **croissante** *sur I si*
$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$
2. *On dit que f est* **décroissante** *sur I si*
$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

4. $g \circ f$ se lit « g rond f »

3. *On dit que f est* **strictement croissante** *sur I si*

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

4. *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur I si*

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

5. *On dit que f est* **monotone** *sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.*
6. *On dit que f est* **strictement monotone** *sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.*

Remarque 2.33. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a les équivalences suivantes :*

1. *f est croissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente positive.*
2. *f est décroissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente négative.*
3. *f est strictement croissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente strictement positive.*
4. *f est strictement décroissante si et seulement si toute droite passant par deux point de $\mathrm{Gr}(f)$ est de pente strictement négative.*

2.5.3 Parité et périodicité.

Proposition 2.34. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Si l'on définit la fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_1(x) = -f(x)$, alors le graphe de f_1 est obtenu à partir de celui de f par symétrie axiale par rapport à l'axe horizontale (Ox).*
2. *Si l'on définit la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_2(x) = f(-x)$, alors le graphe de f_2 est obtenu à partir de celui de f par symétrie axiale par rapport à l'axe verticale (Oy).*
3. *Si l'on définit la fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_3(x) = -f(-x)$, alors le graphe de f_3 est obtenu à partir de celui de f par symétrie centrale par rapport à l'origine O.*

Définition 2.35. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à O (c'est-à-dire tel que $x \in I$ si et seulement si $-x \in I$), et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* **paire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est* **impaire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$.*

Corollaire 2.36. *Si I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à O et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors*

1. *f est paire si et seulement si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe verticale (Oy),*
2. *f est impaire si et seulement si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine O.*

Définition 2.37. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. On dit que f est* **périodique** *de période T si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Proposition 2.38. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. f est périodique de période T si et seulement si le graphe de f est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire engendrant l'axe horizontale (Ox).*

2.6 Limite en un point, continuité, dérivabilité.

Les notions de limite et continuité de fonctions seront abordées plus en détails dans le chapitre 5, celle de dérivabilité sera abordée plus en détails dans le cours d'Analyse 2.

2.6.1 Limite en un point.

Définition 2.39. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$* [5]*, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou d'un bord de I et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite ℓ au point x_0, et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple 2.40. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^2$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.*

2.6.2 Continuité.

Définition 2.41. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.*

1. *Pour $x_0 \in I$, on dit que f est* **continue** *en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
2. *On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Exemple 2.42. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, f est continue sur $\mathbb{R}$.*

2.6.3 Dérivabilité.

Définition 2.43. *Soient I in intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ qui n'est pas un bord de I. On dit que f est* **dérivable** *au point x_0 si la fonction taux d'accroissement $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite au point x_0. Cette limite est appelée* **dérivée de f au point** *x_0 et est notée $f'(x_0)$.*

Remarque 2.44. *Si une fonction f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente à $\mathrm{Gr}(f)$ au point $(x_0, f(x_0))$.*

Les résultats suivants seront démontrés dans le cours d'Analyse 2.

Proposition 2.45. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de I.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
4. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Proposition 2.46. *Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$.*

1. *$f + g$ est dérivable en x et*
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$
2. *fg est dérivable en x et*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
3. *Si g ne s'annule pas en x, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Proposition 2.47. *Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions et $x \in I$ tel que f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

5. Pour deux ensembles A et B, l'union de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Fonctions polynomiales

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$. La fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \end{array}$$

est une **fonction polynomiale de degré** n. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée satisfaisant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Cas particuliers :

1. lorsque $n = 0$ on obtient les **fonctions constantes** (pour $a \in \mathbb{R}$) :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}.$$

Le graphe de f défini ainsi est une droite horizontale.

2. lorsque $n = 1$ on obtient les **fonction affines** (pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$) :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}.$$

Le graphe de f défini ainsi est une droite, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.

3. lorsque $n = 2$ on obtient les **fonctions trinôme** (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$) :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}.$$

Le graphe de f défini ainsi est une parabole.

3.2 Fonction partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier, noté $\mathrm{E}(x)$ et appelé **partie entière de** x, vérifiant

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

$\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, $\mathrm{E}(x) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à x.

Exemples 3.1. *On a* $\mathrm{E}(1) = 1$, $\mathrm{E}(\pi) = 3$, $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.

On définit la **fonction partie entière** comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{E} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{E}(x) \end{array}.$$

E est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement, est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$, et dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Remarque 3.2. *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{E}(x) - x \end{array}.$$

est périodique de période 1 *sur* $\mathbb{R}$.

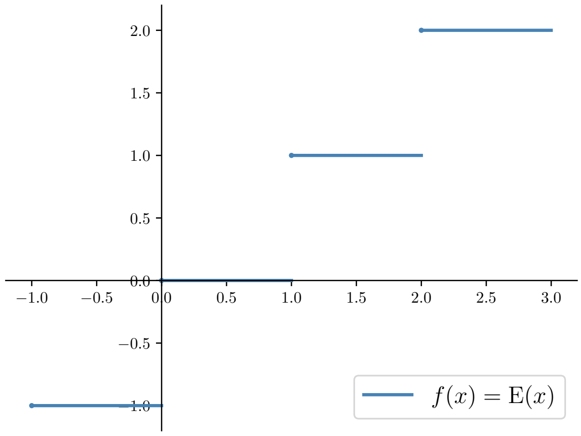


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction partie entière.

3.3 Fonctions trigonométriques

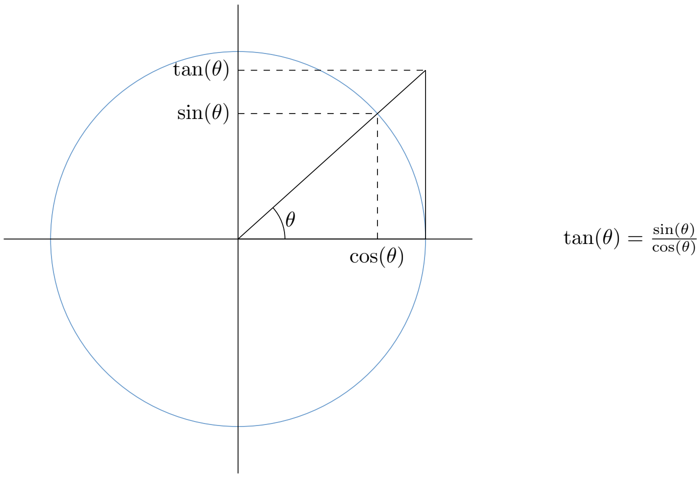


FIGURE 3.2 – Définition géométrique des fonction cos, sin et tan à l'aide d'un cercle de rayon 1.

Proposition 3.3. *Les fonctions* cos, sin *et* tan *ont les propriétés suivantes.*

	cos	sin	tan
Domaine de définition :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Parité :	*paire*	*impaire*	*impaire*
Période :	2π	2π	π
Dérivée :	$-\sin$	$\cos$	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

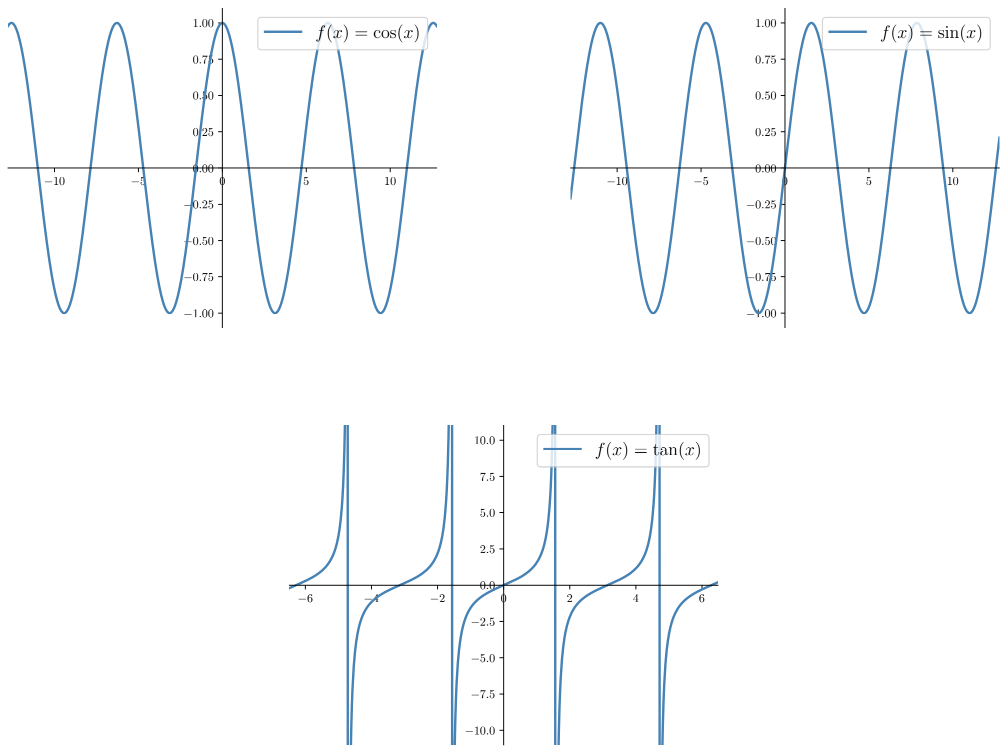


FIGURE 3.3 – Graphes des fonctions cos, sin et tan.

Les formules suivantes (et d'autres) sont démontrées dans le cours d'Algèbre 1.

Proposition 3.4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \\
&\cos(-x) = \cos x, && \sin(-x) = -\sin x, \\
&\cos(\pi - x) = -\cos x, && \sin(\pi - x) = \sin x, \\
&\cos(\pi + x) = -\cos x, && \sin(\pi + x) = -\sin x, \\
&\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, && \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \\
&\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, && \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.
\end{aligned}$$

Proposition 3.5. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $a = b$ *on a*

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \\
\sin(2a) &= 2 \cos a \sin a.
\end{aligned}$$

Remarque 3.6. *Les fonctions* cos *et* sin *prennent les valeurs remarquables suivantes.*

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*N on défini*

On remarque que pour la fonction cos *on pourrait écrire dans l'ordre* $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$.

3.4 Fonctions trigonométriques réciproques

On remarque que les fonctions suivantes sont bijectives :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos : [0,\pi] \to [-1,1], \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}.$$

On peut définir leur bijection réciproque.

Définition 3.7. 1. *On appelle* **arc-sinus** *et on note* $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad et \quad \sin(\arcsin y) = y \quad \forall y \in [-1,1].$$

2. *On appelle* **arc-cosinus** *et on note* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction cosinus à* $[0,\pi]$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0,\pi] \quad et \quad \cos(\arccos y) = y \quad \forall y \in [-1,1].$$

3. *On appelle* **arc-tangente** *et on note* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *On a alors les égalités suivantes :*

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad et \quad \tan(\arctan y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.8. *Attention, les égalités* $\arccos(\cos x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$ *et* $\arctan(\tan x) = x$ *ne sont pas vraies pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Par exemple* $\arccos(\cos(3\pi)) = \arccos(-1) = \pi$.

Proposition 3.9.

1. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et satisfait, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et satisfait, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et satisfait, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

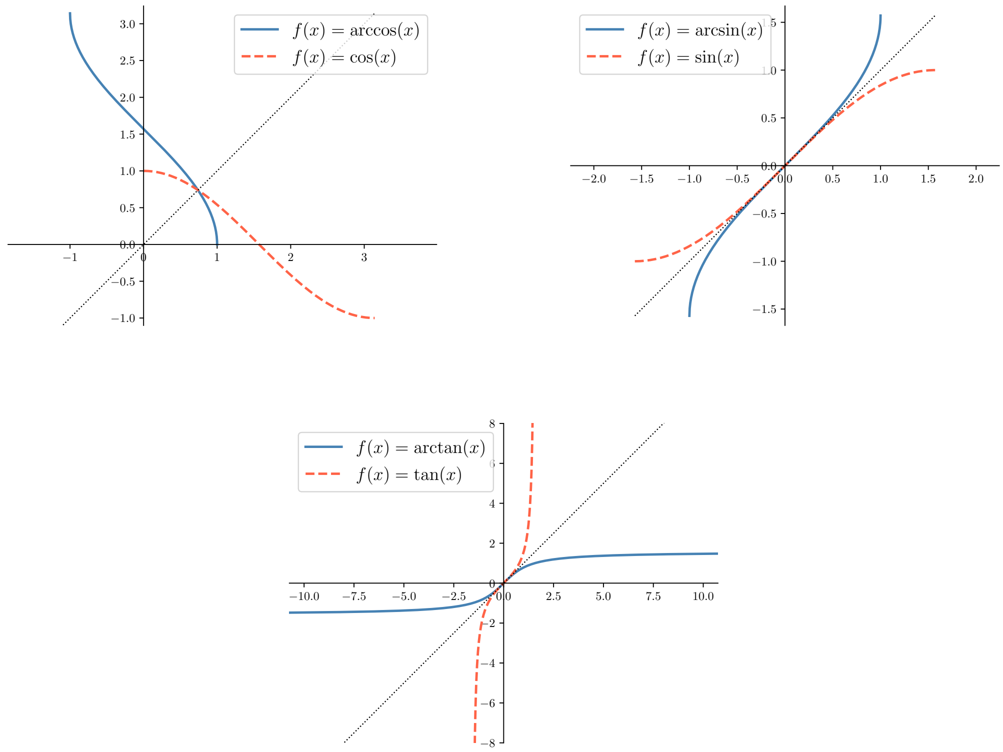


FIGURE 3.4 – Graphes des fonctions arccos, arcsin et arctan.

Démonstration. On admet que ces fonctions sont dérivables (elles sont dérivables car fonctions réciproques de fonctions dérivables de dérivée ne changeant pas de signe, ce résultat sera démontré dans le cours d'Analyse 2).

Calculons la dérivée de arcsin. Pour $x \in]-1,1[$ on a l'identité

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

En dérivant on obtient

$$\arcsin'(x)\cos(\arcsin x) = 1.$$

On a de plus $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$ et comme $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos(\arcsin x) > 0$ et donc

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

ce qui donne le résultat.

Le calcul de la dérivée de arccos est similaire. Calculons maintenant la dérivée de arctan. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a l'identité

$$\tan(\arctan x) = x.$$

En dérivant, on obtient

$$\arctan'(x)(1 + \tan^2(\arctan x)) = 1,$$

et comme $\tan^2(\arctan x) = x^2$ et $1 + x^2 > 0$ on en déduit bien

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$\square$

3.5 Fonctions exponentielle et logarithme

On admet le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Il existe une unique fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $f(0) = 1$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** *et est notée*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to &]0, \infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}.$$

Remarque 3.11. *On note souvent* e^x *au lieu de* $\exp(x)$.

Proposition 3.12. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1. $$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$
2. $$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)},$$
3. $$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

Proposition 3.13. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Remarque 3.14. *Comme on le verra dans le chapitre 5,* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *signifie*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M,$$

alors que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ *signifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 3.15. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, c'est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, \infty[$.

On peut donc définir la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

Définition 3.16. *On définit la fonction* **logarithme népérien** *et on note* $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *la bijection réciproque de la fonction exponentielle. On a donc les égalités suivantes :*

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \exp(\ln(y)) = y \quad \forall y \in]0, \infty[.$$

Proposition 3.17. *Pour tous* $x, y \in]0, \infty[$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1. $$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$
2. $$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),$$
3. $$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

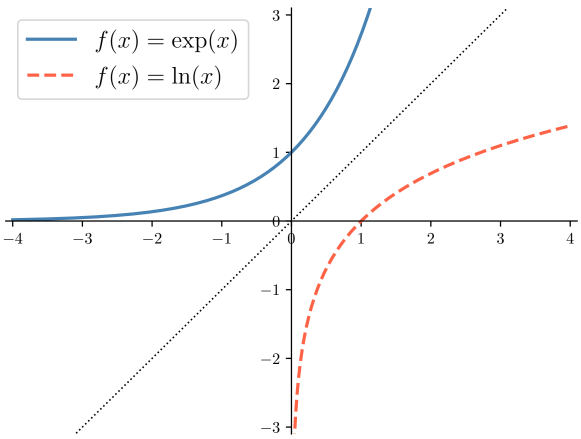


FIGURE 3.5 – Graphes des fonctions exp et ln.

Proposition 3.18. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Remarque 3.19. *Si I est un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un bord de I, $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = -\infty$ signifie*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \leqslant M.$$

Proposition 3.20. *La fonction* ln *est dérivable et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$, *avec pour tout* $x \in]0, +\infty[$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Comme pour les fonction trigonométriques réciproques on admet que ln est dérivable. Calculons sa dérivée. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $\exp(\ln(x)) = x$, et donc en dérivant on obtient

$$\ln'(x) \exp(\ln(x)) = 1,$$

ce qui implique le résultat puisque $\exp(\ln(x)) = x > 0$. □

3.6 Fonctions hyperboliques

Définition 3.21. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions* **cosinus hyperbolique** *(notée* cosh*),* **sinus hyperbolique** *(notée* sinh*) et* **tangent hyperbolique** *(notée* tanh*) comme suit : pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 3.22. *Les fonctions* cosh, sinh *et* tanh *ont les propriétés suivantes.*

	cosh	sinh	tanh
Domaine de définition :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité :	*paire*	*impaire*	*impaire*
Dérivée :	sinh	cosh	$1 - \tanh^2$
Limite en $+\infty$:	$+\infty$	$+\infty$	1
Limite en $-\infty$:	$+\infty$	$-\infty$	-1

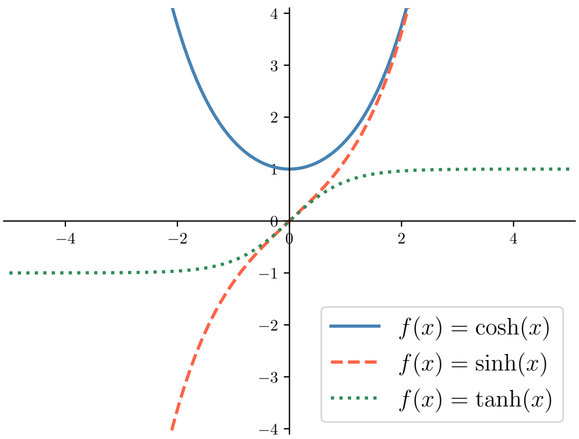


FIGURE 3.6 – Graphes des fonctions cosh, sinh et tanh.

Proposition 3.23. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
&\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,\\
&\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \quad \textit{et} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x},\\
&\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),\\
&\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y),\\
&\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1,\\
&\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x).
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première égalité il suffit de voir que pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} = 1.$$

La deuxième ligne est obtenue par un calcul immédiat. Pour la troisième on a pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x)\cosh(y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4},$$

$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4},$$

et donc

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x).$$

Le reste est obtenu à l'aide de calculs similaires.

□

3.7 Fonctions puissance

Définition 3.24.

1. *Pour $a \in \mathbb{N}$ on définit*

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ fois}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec la convention $x^0 = 1$. La fonction $x \mapsto x^a$ est polynomiale, elle est paire si a est pair, impaire si a est impair.

2. *Pour $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ on définit*
$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$
3. *Si $a = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, x^a est la racine n-ième de x (l'unique y tel que $y^n = x$). Si n est pair elle est définie pour tout $x \geqslant 0$, si n est impair elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
4. *Si $a \in \mathbb{R}$ on définit*
$$x^a = \exp(a \ln(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque 3.25. *La définition du point 4. généralise les définitions des points précédents lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effet on a par exemple, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{N}$,*
$$\exp(a \ln(x)) = (\exp(\ln(x)))^a = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x.$$

Proposition 3.26. *Les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas, pour $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$ tels que x^a, x^b, x^{ab} et y^a existent (et $x \neq 0$ pour le denier point) :*
$$(1)^a = 1, \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

Proposition 3.27. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto a x^{a-1}$.*

Remarque 3.28. *Il faut faire attention à ne pas confondre les fonctions puissances définies sur $]0, \infty[$ par $f(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$ avec $a \in \mathbb{R}$, et les fonctions g, variantes de la fonction exponentielle, définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = b^x = \exp(\ln(b)x)$, pour $b > 0$.*

3.8 Croissance comparée

La résultat suivant sera démontré dans le cadre des suites dans le chapitre 4.

Théorème 3.29. *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln(x))^c} = +\infty,$$
et
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\ln(x))^c} = +\infty.$$

Chapitre 4

Suites réelles

4.1 Définitions

Définition 4.1. *On appelle suite réelle une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la fonction qui associe à tout* $n \in \mathbb{N}$ *le réel* u_n*.*

Exemple 4.2. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n + 1.$$

Définition 4.3. *Pour deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et un réel* λ *on peut définir*

1. *la* **somme** $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*
2. *le* **produit** $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*
3. *la* **multiplication par un réel** $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Remarque 4.4. *On peut ne pas définir une suite sur* $\mathbb{N}$ *mais sur* $\mathbb{N}^*$*, ou sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2... On note alors* $(u_n)_{n\,\geqslant\,1}$*,* $(u_n)_{n\,\geqslant\,2}$*...*

Définition 4.5. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

1. **croissante** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n,$$
2. **décroissante** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n,$$
3. **monotone** *si elle est croissante ou décroissante,*
4. **majorée** *si*
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M,$$
5. **minorée** *si*
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m,$$
6. **bornée** *si elle est majorée et minorée.*

Remarque 4.6. *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et si* $m \geqslant n$ *on a* $u_m \geqslant u_n$*. A l'inverse si elle est décroissante et si* $m \geqslant n$ *on a* $u_m \leqslant u_n$*.*

Définition 4.7. *Une propriété* $P(n)$ *dépendant de* $n \in \mathbb{N}$ *est dite vraie* **à partir d'un certain rang** *si*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow P(n) \text{est vraie.}$$

Exemple 4.8. *On considère la suite* $(u_n)_{n\,\geqslant\,1}$ *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 10n.$$

On a $u_0 = 1$*,* $u_1 = -8$*,* $u_2 = -16$*, donc cette suite n'est pas croissante. Mais pour* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 2^n - 10n - 10 - (2^n - 10n) = 2^n - 10,$$

et comme $2^n - 10 \geqslant 0$ *dès que* $n \geqslant 4$*, cette suite est croissante à partir d'un certain rang.*

4.2 Suites classiques

Définition 4.9. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **arithmétique de progression** $r \in \mathbb{R}$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.10. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de progression* $r \in \mathbb{R}$ *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr, \quad et \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r.$$

Définition 4.11. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}^*$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = qu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.12. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique* $q \in \mathbb{R}$ *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = q^n u_0, \quad et \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & si\ q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} u_0 & sinon \end{cases}.$$

Définition 4.13. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **arithmético-géométrique de paramètres** $q \in \mathbb{R}^*$ **et** $r \in \mathbb{R}$ *si elle est définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = qu_n + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.14. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmético-géométrique de paramètres* $q \in \mathbb{R}^*$ *et* $r \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $q = 1$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique.*
2. *Si* $q \neq 1$, *l'équation d'inconnue* $a \in \mathbb{R}$
$$a = qa + r$$
a comme unique solution
$$a = \frac{r}{1-q},$$
et on a
$$u_{n+1} - a = qu_n + r - (qa + r) = q(u_n - a),$$
donc la suite $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* q. *Ainsi pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = a + u_n - a = a + q^n(u_0 - a),$$
et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \big(a + (u_k - a)\big) = (n+1)a + \frac{q^{n+1}-1}{q-1}(u_0 - a).$$

Remarque 4.15. *Les suites classiques présentées dans cette section sont des exemples simples de suites dites récurrentes d'ordre* 1, u_{n+1} *étant défini comme une fonction de* u_n. *Les suites récurrentes apparaissent naturellement dans le calcul de complexité d'algorithmes définis eux-même par récurrence, la complexité d'un algorithme correspondant au nombre d'opérations élémentaires nécessaires à sa mise en œuvre.*

Par exemple, pour calculer $n!$, *on peut calculer* $(n-1)!$, *et le multiplier par* n. *Mais pour calculer* $(n-1)!$ *on peut calculer* $(n-2)!$ *et le multiplier par* $n-1$, *etc... Il s'agit d'un algorithme récursif. Si l'on note* u_n *le nombre d'opérations (ici multiplications) nécessaires pour calculer* $n!$, *on a simplement* $u_{n+1} = u_n + 1$ *et* $u_1 = 0$, $(u_n)_{n\,\geqslant\,1}$ *est une suite arithmétique.*

Pour l'exemple classique des tours de Hanoï (voir la page Wikipedia dédiée), la complexité est arithmético-géométrique, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

4.3 Convergence de suite

Définition 4.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **tend vers** *ℓ (ou a pour limite ℓ) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque 4.17.

1. *L'ordre est important dans les quantificateurs, dans la définition précédente N dépend de ε.*
2. *Comme $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ équivaut à $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.*
3. *Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Exemple 4.18. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0. En effet, pour $\varepsilon > 0$ on a $|u_n - 0| = \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$, on peut donc prendre $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.*

Définition 4.19.

1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge** *(ou est convergente) s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si*

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui équivaut à

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad \{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est de cardinal fini.}$$

2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **diverge** *(ou est divergente) si elle n'est pas convergente. Ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si et seulement si*

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \quad \{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est de cardinal infini.}$$

Exemple 4.20. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet, pour tout $\ell \geqslant 0$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$|u_{2k+1} - \ell| = |-1 - \ell| = 1 + \ell > \frac{1}{2},$$

donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > 1/2\}$ est de cardinal infini. De même, pour $\ell \leqslant 0$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|u_{2k} - \ell| = |1 - l| = 1 - l > \frac{1}{2},$$

et donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| > 1/2\}$ est de cardinal infini.

Théorème 4.21 (Unicité de la limite)**.** *La limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique. Autrment dit si pour $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers ℓ_1 et ℓ_2. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \varepsilon$, puisque que cela implique bien que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe N_1 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe N_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Définissions $N = \max(N_1, N_2)$. Comme $N \geqslant N_1$ et $N \geqslant N_2$ on en déduit bien, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_N - (\ell_2 - u_N)| \\ &\leqslant |\ell_1 - u_N| + |\ell_2 - u_N| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.22. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant 1.$$

Donc, par inégalité triangulaire inversée, pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n| - |\ell| \leqslant ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant 1,$$

et ainsi, pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n| \leqslant |\ell| + 1$. De plus l'ensemble $\{|u_n| : n \in \{0, \dots, N-1\}\}$ est de cardinal fini et est donc majoré par $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|)$. Au final on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leqslant \max(M, |\ell| + 1).$$

□

4.4 Opérations sur les limites

Théorème 4.23. *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ et deux réels a et b. Alors*

$$au_n + bv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\ell_1 + b\ell_2.$$

Démonstration. Ce résultat est évident si $a = b = 0$. Supposons maintenant que $|a| + |b| > 0$ et considérons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a| + |b|}.$$

De même, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a| + |b|}.$$

Mais alors, en définissant $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$ on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |au_n + bv_n - (a\ell_1 + b\ell_2)| &= |a(u_n - \ell_1) + b(v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |a||u_n - \ell_1| + |b||v_n - \ell_2| \\ &\leqslant |a|\frac{\varepsilon}{|a| + |b|} + |b|\frac{\varepsilon}{|a| + |b|} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.24. *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$. Alors*

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2.$$

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est bornée et il existe donc $M > 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|l_2| + M},$$

et de même, comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{M + |l_2|}.$$

En définissant $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$ on obtient

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell_1\ell_2| &= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\
&\leqslant |u_n||v_n - \ell_2| + |\ell_2||u_n - \ell_1| \\
&\leqslant M\frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} + |\ell_2|\frac{\varepsilon}{M + |\ell_2|} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.25. *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $\ell \neq 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors u_n est non nul à partir d'un certain rang et on a de plus*

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que u_n est non nul à partir d'un certain rang. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant N_1$ on a

$$|\ell| - |u_n| \leqslant ||\ell| - |u_n|| \leqslant |\ell - u_n| \leqslant \frac{|\ell|}{2},$$

et donc $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$ pour tout $n \geqslant N_1$. On a donc bien montré que u_n est non nul à partir d'un certain rang.

Montrons maintenant que $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$. Considérons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell^2\varepsilon}{2}.$$

En définissant $N = \max(N_1, N_2)$ on obtient alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|} \leqslant \frac{\frac{\ell^2\varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \cdot |\ell|} \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarque 4.26. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$ (c'est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire inverse).*

4.5 Limites de suites et inégalités

Théorème 4.27. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ℓ_1, ℓ_2 des réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$. Alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\ell_2 - \ell_1 \geqslant -\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n - \ell_1 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow v_n - \ell_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, en définissant $N = \max(N_1, N_2)$, on a $\ell_2 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} + v_N$ et $-\ell_1 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} - v_N$, ce qui implique, comme $v_N - u_N \geqslant 0$,

$$\ell_2 - \ell_1 \geqslant -\varepsilon + v_N - u_N \geqslant -\varepsilon.$$

□

Remarque 4.28. *Attention ce résultat n'est pas vrai pour des inégalités strictes, par exemple $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.*

Corollaire 4.29. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

1. *S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \leqslant M$.*
2. *S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \geqslant m$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent en prenant une des deux suites constante.

□

Théorème 4.30 (Théorème dit « des gendarmes »)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exemple 4.31. *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$. Alors en définissant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{1}{n+1}$ et $w_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n - \ell \geqslant -\varepsilon,$$

et

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow w_n - \ell \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon,$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. □

4.6 Convergence et monotonie

Théorème 4.32. *Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée et convergente.*

Idée de preuve. La preuve de ce résultat est admise. L'idée, par exemple dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, est de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, qui admet bien une borne supérieure puisqu'il est non vide et majoré (pour plus de détails, voir par exemple [2]). $\square$

Remarque 4.33. *Attention, il existe des suite croissantes non convergentes (par exemple $u_n = n$) et des suite convergentes non monotones (par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$).*

Définition 4.34. *On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* **adjacentes** *si*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante,*
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,*
3. $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 4.35. *Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0,$$

puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, comme de plus $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais donc $u_n \leqslant v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée, elle converge donc vers un $\ell_1 \in \mathbb{R}$. De même, $v_n \geqslant u_0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée, elle converge donc vers un $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2,$$

et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. $\square$

Exemple 4.36. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près par*

$$u_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n},$$

et l'approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près par

$$v_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$

(par exemple l'approximation décimale par défaut de 3.17641 à 10^{-2} près est 3.17, alors que son approximation décimale par excès à 10^{-2} près est 3.18).

On a bien $u_n - v_n = -\frac{1}{10^n} \underset{n\to\infty}{n \longrightarrow} 0$ (il s'agit en fait d'une conséquence du corollaire 4.48). De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $10\,\mathrm{E}(10^n x)$ est un entier inférieur ou égal à $10 \cdot 10^n x = 10^{n+1}x$, on a

$$10\,\mathrm{E}(10^n x) \leqslant \mathrm{E}(10^{n+1}x),$$

et donc, en divisant par 10^{n+1},

$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $10(\mathrm{E}(10^n x) + 1)$ est un entier strictement supérieur à $10 \cdot 10^n x = 10^{n+1}x$, on a

$$10(\mathrm{E}(10^n x) + 1) \geqslant \mathrm{E}(10^{n+1}x) + 1,$$

et donc, en divisant par 10^{n+1},

$$v_n \geqslant v_{n+1}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Ces deux suite sont adjacentes et convergent donc vers une même limite. Comme $u_n \leqslant x \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ cette limite est x.

4.7 Suites extraites

L'idée est, étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sélectionner certains termes de cette suite pour définir une nouvelle suite, appelée suite extraite ou sous-suite.

Définition 4.37. *On appelle une* **extraction** *une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, une* **sous-suite** *ou* **suite extraite** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extraction.*

Exemples 4.38. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

La démonstration de la propriété suivante est immédiate.

Proposition 4.39. *Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.*
5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.*

Remarque 4.40. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut avoir une sous-suite qui converge même si elle-même ne converge pas. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.*

Théorème 4.41 (Bolzano Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Idée de preuve. La preuve de ce résultat est admise. Une preuve possible, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, est de construire une suite de segments emboîtés les uns dans les autres, de largeur tendant vers 0, et contenant chacun une infinité de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour plus de détails voir [2]. □

Exemple 4.42. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet une sous-suite convergente.*

4.8 Limites infinies

Définition 4.43. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.*

1. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

   On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A.$$

   On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 4.44. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$. En effet si $A \in \mathbb{R}_-$ on a $u_n \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors que si $A \geqslant 0$ on a $u_n \geqslant A$ dès que $n \geqslant \sqrt{A}$.*

Théorème 4.45. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors il y a deux possibilités :*

1. *soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$,*
2. *soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. Il y a deux cas possibles : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être bornée ou non. Si elle est bornée, comme elle croissante par hypothèse elle converge, d'après le théorème 4.32. Montrons que si elle n'est pas bornée elle tend vers $+\infty$. Considérons $A \in \mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$. Mais comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant u_N \geqslant A$. □

Remarque 4.46. *Attention une suite qui ne converge pas ne diverge pas forcément vers $+\infty$ ou $-\infty$ (considérer par exemple $u_n = (-1)^n$).*

Théorème 4.47. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.*

1. *Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
2. *Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Démonstration. La preuve est immédiate, en utilisant la définition de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. □

Corollaire 4.48. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r > 1$ et de terme initial $u_0 > 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. D'après le binôme de Newton (voir le cours d'Algèbre 1), en notant $\alpha = r - 1 > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0(1+\alpha)^n = u_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \geqslant u_0(1+n\alpha).$$

En posant $v_n = u_0(1+n\alpha)$ on a $u_n \geqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $\alpha > 0$ et $u_0 > 0$. On en déduit d'après le théorème précédent que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Théorème 4.49. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a les résultats d'addition suivants pour les limites infinies (les ? ? correspondent aux formes indéterminées « $\infty - \infty$ »).*

	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée*	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ $u_n - v_n$? ?	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$u_n + v_n$? ? $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée*	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$u_n + v_n$ *bornée* $u_n - v_n$ *bornée*	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$u_n + v_n$? ? $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $u_n - v_n$? ?

Démonstration. Considérons le cas où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, les autres pouvant être traités de manière similaire. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée il existe $M \geqslant 0$ tel que $|v_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons $A \in \mathbb{R}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A + M.$$

Mais alors pour tout $n \geqslant N$ on a

$$u_n + v_n \geqslant u_n - |v_n| \geqslant A + M - M \geqslant A, \quad \text{et} \quad u_n - v_n \geqslant u_n - |v_n| \geqslant A + M - M \geqslant A.$$

□

Remarque 4.50.

1. *On rappelle que si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors elle est bornée. Ainsi par exemple lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ on a $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*

2. *Dans les cas de forme indéterminée, le résultat dépend de la situation. Par exemple si* $u_n = n^2+n$ *et* $v_n = n^2$ *on a* $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*, alors que si* $u_n = n^2 + \frac{1}{n+1}$ *et* $v_n = n^2$ *on a* $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Concernant les multiplications de limites infinies il faut faire attention aux signes.

Théorème 4.51. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites. On a les résultats suivants concernant la limite de* $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(les ? ? correspondent aux formes indéterminées « $0\times\infty$ »).*

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a<0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a>0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*? ?*	$-\infty$	$-\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	*? ?*	0	0	0	*? ?*
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*? ?*	$+\infty$	$+\infty$

Démonstration. Traitons le cas $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a>0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, les autres cas pouvant être traités de manière similaire. On veut montrer que dans cette situation $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Soit $A\in\mathbb{R}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a>0$ il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n - \ell \geqslant -\frac{a}{2},$$

et comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow v_n \geqslant \frac{2A}{a}.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant \max(N_1,N_2)$ on a (remarquons que $u_n \geqslant \frac{\ell}{2} \geqslant 0$ et donc que multiplier chaque membre de l'inégalité $v_n \geqslant \frac{2A}{\ell}$ par u_n ne change pas les sens de l'inégalité)

$$u_nv_n \geqslant \frac{a}{2}\frac{2A}{a} = A.$$

□

Théorème 4.52. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite.*

1. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors* $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *alors* $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $u_n>0$ *à partir d'un certain rang alors* $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $u_n<0$ *à partir d'un certain rang alors* $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration. Montrons le troisième point, les autres peuvent être démontré de manière similaire. Soit $A>0$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n>0$ à partir d'un certain rang il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on a $0\leqslant u_n\leqslant 1/A$, et donc $u_n\geqslant A$. □

Corollaire 4.53. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $|r|<1$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Si $u_0 = 0$ il n'y a rien à montrer. Si $|u_0|>0$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{|u_n|}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est géométrique de raison $1/|r|>1$ et de terme initial strictement positif, et donc diverge vers $+\infty$. On en déduit d'après le théorème précédent que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Remarque 4.54.

1. *L'hypothèse de ne pas changer de signe à partir d'un certain rang les points 3. et 4. du théorème 4.52 est cruciale. Par exemple si* $u_n = (-1)^n/(n+1)$, *alors* $\frac{1}{u_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $\frac{1}{u_{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
2. *Avec les deux théorèmes précédents on peut traiter la limite de* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Par exemple si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $v_n > 0$ *à partir d'un certain rang, on a* $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et donc* $\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Les formes indéterminées de $\frac{u_n}{v_n}$ *sont « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », et « $\frac{\infty}{0}$ » lorsque l'on n'a pas d'information sur le signe du dénominateur.*

Remarque 4.55. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites avec* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs strictement positives on peut s'intéresser à la limite de* $(u_n^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$. *Dans ce cas on peut écrire*

$$u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln(u_n)),$$

et on se retrouve alors à étudier la limite de $v_n \ln(u_n)$. *Par exemple si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors* $v_n \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et donc* $u_n^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Les formes indéterminées de $u_n^{v_n}$ *sont donc*

1. « 1^∞ » : *lorsque* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ *et* $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *c'est-à-dire* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. « 0^0 » : *lorsque* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, *c'est-à-dire* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. « ∞^0 » : *lorsque* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *c'est-à-dire* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4.9 Comparaison de suites

Définition 4.56. *Soient* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *deux suites, avec* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang* n_0.

1. *On dit que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* **dominée** *par* $(v_n)_{n\geqslant 0}$, *et on note* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ *(le symbole O se lit « grand O ») si la suite* $(u_n/v_n)_{n\geqslant n_0}$ *est bornée, c'est-à-dire*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M.$$

2. *On dit que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* **négligeable** *devant* $(v_n)_{n\geqslant 0}$, *et on note* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *(le symbole o se lit « petit o ») si*

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. *On dit que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* **équivalente** *à* $(v_n)_{n\geqslant 0}$, *et on note* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *si*

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exemples 4.57. *On a*

$$4n+1 = \underset{n\to+\infty}{O}(n), \quad n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^2), \quad n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2.$$

Remarque 4.58.

1. *Si* $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *avec* ℓ *réel, alors* $(u_n/v_n)_{n\geqslant 0}$ *est bornée et donc* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
2. *Si* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, *alors* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
3. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, *alors* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

4. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ *signifie que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *tend vers* 0.
5. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *si et seulement si* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
6. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *si et seulement si* $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
7. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$*, alors* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$.
8. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$*, alors* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
9. *Attention on n'a pas le droit de sommer les équivalents : si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$*,* $(u_n + a_n)_{n\geqslant 0}$ *n'est pas forcément équivalente à* $(v_n + b_n)_{n\geqslant 0}$*. Par exemple* $n + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *et* $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n+1$*, mais* $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ *n'est pas équivalente à la suite constante égale à* 1.
10. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Proposition 4.59. *Soient* a *un réel strictement positif et* r *un réel strictement supérieur à* 1*. On a*

1. $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$,
2. $r^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$,
3. $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(r^n)$,
4. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^a)$.

Démonstration. Pour la preuve de 1., on a

$$\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n},$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(n!/n^n)_{n\geqslant 1}$ tend bien vers 0.

Pour la preuve de 2., on a

$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k},$$

et comme la suite $(r/k)_{k\geqslant 1}$ tend vers 0 il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant K$ on a $0 \leqslant r/k \leqslant 1/2$. Mais alors, pour $n \geqslant K$, on a

$$0 \leqslant \frac{r^n}{n!} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{K} \frac{r}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-K} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(r^n/n!)_{n\geqslant 1}$ tend bien vers 0.

Pour la preuve de 3., en notant $h = r - 1 > 0$ et en utilisant le binôme de Newton, on obtient

$$\frac{n^a}{r^n} = \frac{n^a}{(1+h)^n} = \frac{n^a}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k}.$$

En fixant $k_0 = \mathrm{E}(a) + 1$ (où E désigne la partie entière) et en supposant $n \geqslant k_0$, on déduit

$$0 \leqslant \frac{n^a}{r^n} \leqslant \frac{n^a}{\binom{n}{k_0} h^{k_0}}.$$

Il reste à minorer $\binom{n}{k_0}$. Supposons $n \geqslant 2k_0$. Alors pour $0 \leqslant i \leqslant k_0$ on a

$$n - i \geqslant n - k_0 \geqslant n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$

et donc

$$\binom{n}{k_0} = \frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k_0+1)}{k_0!} \geqslant \frac{1}{2^{k_0}k_0!}n^{k_0}.$$

On en déduit, puisque $k_0 > a$,

$$0 \leqslant \frac{n^a}{r^n} \leqslant \frac{2^{k_0}k_0!}{h^{k_0}} \frac{1}{n^{k_0-a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(n^a/r^n)_{n \geqslant 1}$ tend bien vers 0.

Pour la preuve de 4., on a

$$\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{e^{a\ln(n)}}.$$

Posons $\alpha_n = \mathrm{E}(\ln(n))$. Comme

$$\ln(n) \leqslant \alpha_n + 1 \quad \text{et} \quad e^{a\ln(n)} \geqslant e^{a\alpha_n},$$

on obtient

$$0 \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a} \leqslant \frac{\alpha_n}{(e^a)^{\alpha_n}} + \frac{1}{n^a}.$$

Or $(1/n^a)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0 et comme $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ la suite $(\alpha_n/(e^a)^{\alpha_n})_{n \geqslant 1}$ tend également vers 0 d'après le point 3. démontré au-dessus. La suite $(\ln(n)/n^a)_{n \geqslant 1}$ tend donc bien vers 0. □

Remarque 4.60. *On a les comparaisons suivantes (on utilise ici la notation $u_n \ll v_n$ lorsque $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ pour présenter ces comparaisons de manière synthétique) :*

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll e^n \ll 10^n \ll n! \ll n^n.$$

Remarque 4.61. *Les notations o et O sont très utiles en informatique, en particulier lorsque l'on calcule la complexité d'un algorithme. Par exemple, il est plus intéressant d'avoir un algorithme de complexité $\underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$ qu'un algorithme de complexité $\underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$.*

4.10 Suites de Cauchy

Définition 4.62. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m_1 \geqslant N, \forall m_2 \geqslant N, |u_{m_1} - u_{m_2}| \leqslant \varepsilon.$$

On admet le Théorème suivant.

Théorème 4.63. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Chapitre 5

Continuité des fonctions réelles

5.1 Limite de fonction

Définissons la notion de limite de fonction, finie ou infinie, en un point ou à l'infini.

Définition 5.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union d'intervalles, f une fonction définie sur I, $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou d'un bord de I et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 5.2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union d'intervalles, f une fonction définie sur I et $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément d'un bord de I.*

1. *On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

2. *On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Définition 5.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

2. *On dit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 5.4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*

1. *On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

2. *On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

3. *On dit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

4. *On dit que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Remarque 5.5.

1. *Lorsque* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*, la droite verticale d'équation* $x = x_0$ *est une asymptote verticale au graphe de* f*.*
2. *Lorsque* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$*, la droite horizontale d'équation* $y = \ell$ *est asymptote horizontale au graphe de* f*.*

Exemples 5.6. *On a* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$*.*

On a la caractérisation suivante des limites de fonction.

Théorème 5.7 (Caractérisation séquentielle des limites)**.** *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* x_0 *un élément de* I *ou une borne de* I *(avec possiblement* $x_0 = +\infty$ *ou* $x_0 = -\infty$*), et* ℓ *un réel ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$*. Alors* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *si et seulement si pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* I *satisfaisant* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ *on a* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$*.*

Démonstration. Démontrons ce résultat dans le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, les autres cas pouvant être démontrés de manière similaire.

Supposons tout d'abord que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I satisfaisant $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Mais comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - x_0| \leqslant \delta.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On a bien $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Montrons maintenant que si $f(x)$ ne converge pas vers ℓ lorsque x tend vers x_0, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I satisfaisant $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ mais telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ. Par contraposée, montrer ce résultat revient à conclure la démonstration du théorème.

On suppose donc que $f(x)$ ne converge pas vers ℓ lorsque x tend vers x_0, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Pour ce ε, en considérant $\delta_n = \frac{1}{n+1}$, on en déduit l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$. Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite d'éléments de I satisfaisant $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ mais telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ. □

Une conséquence directe du théorème précédent est que les propriétés des limites de suites sont satisfaites par les limites de fonction.

Théorème 5.8. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f*,* g *et* h *des fonctions définies sur* I *et* x_0 *un élément de* I *ou du bord de* I *(avec possiblement* $x_0 = +\infty$ *ou* $x_0 = -\infty$*).*

1. *Soient* ℓ_1, ℓ_2 *des réels tels que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} (af + bg)(x) = a\ell_1 + b\ell_2, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \ell_1\ell_2.$$

Si de plus g *ne s'annule pas et* $\ell \neq 0$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

2. *Soient* ℓ_1, ℓ_2 *des réels tels que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$. *Si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\ell_1 \leqslant \ell_2$.
3. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$. *Si* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.
4. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *et* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
5. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *et* $f(x) \geqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

Exemple 5.9. *Considérons les fonctions* f, g *et* h *définies sur* $I =]0, +\infty[$ *par* $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $h(x) = -\frac{1}{x}$ *pour tout* $x \in I$. *Alors comme* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ *et* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *pour tout* $x \in I$ *on a* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Théorème 5.10 (Composition de limites)**.** *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et deux fonctions* $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe* x_0 *un élément de* I *ou du bord de* I *(possiblement* $x = +\infty$ *ou* $x = -\infty$*),* y_0 *un élément de* J *ou du bord de* J *(possiblement* $y_0 = +\infty$ *ou* $y_0 = -\infty$*) et* $\ell \in \mathbb{R}$ *ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$ *tels que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \textit{et} \quad \lim_{y\to y_0} g(x) = \ell.$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

Démonstration. On démontre ce résultat dans le cas $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$, les autres cas pouvant être démontrés de manière similaire. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{y\to y_0} g(x) = \ell$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on a

$$|y - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Mais comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x - x_0| \leqslant \gamma \Rightarrow |f(x) - y_0| \leqslant \delta.$$

Ainsi on a montré le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \gamma \Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$. □

Exemple 5.11. *Considérons* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définies pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $g(x) = \exp(x)$ *et* $f(x) = -x^3 + 2$. *Ainsi* $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est défini pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $g \circ f(x) = \exp(-x^3 + 2)$. *Comme*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \textit{et} \quad \lim_{y\to-\infty} g(x) = 0,$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} (g \circ f)(x) = 0.$$

Définition 5.12. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ *et* ℓ *un élément de* $\mathbb{R}$ *ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$.

1. *On dit que* ℓ *est la limite à gauche de* f *(on note* $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$*) si la restriction de* f *à* $I \cap]-\infty, x_0[$ *admet* ℓ *pour limite en* x_0.
2. *On dit que* ℓ *est la limite à droite de* f *(on note* $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$*) si la restriction de* f *à* $I \cap]x_0, +\infty[$ *admet* ℓ *pour limite en* x_0.

Exemple 5.13. *Si* E *est la fonction partie entière, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *on a* $\lim_{\substack{x\to k \\ x>k}} \mathrm{E}(x) = k$ *et* $\lim_{\substack{x\to k \\ x<k}} \mathrm{E}(x) = k - 1$.

Remarque 5.14. *Si* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 *est un élément* I *qui n'est pas un bord de* I *et* ℓ *un élément de* $\mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *si et seulement si* $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0) = \ell$.

5.2 Continuité

Définition 5.15. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 5.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout $x_0 \in I$.*

Exemples 5.17. *Les fonctions polynomiales, les fonctions* cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, exp, ln, cosh, sinh, tan *sont continues sur leur ensemble de définition.*

Théorème 5.18. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$,$g \to J$ et $h : J \to$ des fonction continues.*

1. *Les fonctions $f + g : I \to \mathbb{R}$ et $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ sont continues.*
2. *Si la fonction g ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ est continue.*
3. *La fonction $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. Démontrons ce résultat dans le cas de la somme, les autres résultats pouvant être démontrés de manière similairen en utilisant les propriétés des limites de fonction.Soit $x_0 \in I$. Comme f et g sont cotinues en x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Mais alors, par propriété d'opération sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$, et donc que $f + g$ est continue en x_0. Comme ce réultat est vrai pour tout $x_0 \in I$, $f + g$ est continue sur I. $\square$

Exemple 5.19. *La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{2+x^4}{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Définition 5.20. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou du bord de I.*

1. *On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.*
2. *On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

Exemple 5.21. *La fonction partie entière* E *est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

Remarque 5.22. *Si I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 est un point de I qui n'est pas un bord de I, alors f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et continue à gauche en x_0.*

Définition 5.23. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$. Alors la fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}(x_0) = \ell$ est continue sur I et est appelée le prolongement par continuité de f en x_0.*

Exemples 5.24.

1. *La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ pour tout $x < 0$ et $f(x) = x^2$ pour tout $x > 0$ peut prolongée par continuité en* 0 *(en définissant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\widetilde{f}(0) = 0$).*
2. *La fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ peut être prolongée par continuité en* 0*, en définissant $\widetilde{g}(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\widetilde{g}(0) = 1$. En effet, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.*

5.3 Théorème des valeurs intermédiaires et image continue d'un intervalle

Théorème 5.25 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$. Alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Démonstration. Si $y = f(a)$ ou $y = f(b)$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que $f(a) < y < f(b)$ (le cas $f(a) > y > f(b)$ pouvant être démontré de manière similaire). Définissons $a_0 = a$, $b_0 = b$, et procédons par dichotomie, en définissant une des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Il y a à chaque fois deux cas possibles. A la première étape, soit $f(a_0) \leqslant y \leqslant f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$, et dans ce cas on définit $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, soit $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < y \leqslant f(b_0)$, et dans ce cas on définit $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans les deux cas on remarque que $f(a_1) \leqslant y \leqslant f(b_1)$. On procède de manière similaire pour les étapes suivantes : pour $n \geqslant 1$ on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ si $f(a_n) \leqslant y \leqslant f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$, et $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y \leqslant f(b_n)$.

Démontrons par récurrence que la propriété $H_n : b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. H_0 est vraie, puisque $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Il y a deux cas possibles : soit $f(a_n) \leqslant y \leqslant f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$, mais alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2}$, soit $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y \leqslant f(b_n)$, mais alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2}$. Dans les deux cas, puisque H_n est supposée vraie, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, et donc H_{n+1} est vraie. On en déduit que H_n est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il est de plus facile de voir que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est croissante. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_{n+1} = a_n$, mais alors en particulier $a_n \geqslant a_{n+1}$, soit $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, mais comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ on a $b_n \geqslant a_n$ et on en déduit que dans ce cas on a également $a_{n+1} \geqslant a_n$.

En utilisant des arguments similaires on peut voir que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, et convergent donc vers une même limite $x \in [a, b]$. Comme $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ par continuité de f, on en déduit $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $y = f(x)$. $\square$

Exemple 5.26. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + \cos(x) - 3$ s'annule sur l'intervalle $[0, 4]$. En effet f est continue sur $[0, 4]$, et vérifie $f(0) = -2 < 0$ et $f(4) = 13 + \cos(4) > 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.*

Remarque 5.27. *Il est important que I soit un intervalle pour pouvoir appliquer le théorème de valeurs intermédiaires. Par exemple la fonction $f; \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ vérifie $f(1) > 0$ et $f(-1) < 0$ mais il n'existe pas de $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = 0$ (f n'est pas définie sur $[-1, 1]$).*

Proposition 5.28. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. On considère I un intervalle et f une fonction continue définie sur cet intervalle. Soient y_1 et y_2 deux éléments distincts de $f(I)$, avec $y_1 < y_2$. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Supposons sans perte de généralité que $x_1 < x_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in [y_1, y_2]$ il existe $x \in [x_1, x_2] \subset I$ tel que $y = f(x)$. $f(I)$ est donc bien un intervalle. $\square$

Exemple 5.29. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f([-1, 4]) = [1, 17]$.*

Remarque 5.30. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement croissante, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. A l'inverse, si f est strictement décroissante, $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.*

On admet le théorème suivant, dont la preuve repose sur le théorème de Bolzano-Weierstass. On rappelle qu'un segment est un intervalle du type $[a, b]$.

Théorème 5.31. *Soit I un segment et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes. De plus $f(I)$ est un segment.*

Remarque 5.32. *Le résultat précédent est faux en général si I n'est pas un segment, par exemple* $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\mathbb{R}_-) =]0,1]$ *et* $f(]0,1]) = [1,+\infty[)$ *lorsque* $f(x) = 1/x$.

5.4 Limite, continuité et monotonie

Les fonctions monotones ont des propriétés particulières.

Théorème 5.33 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur I. Alors f admet une limite (finie ou infinie) aux bords de I. De plus f admet en tout point x_0 de I une limite à gauche et à droite avec, dans le cas où f est croissante,*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x),$$

et dans le cas où f est décroissante,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x).$$

Démonstration. La preuve de ce Théorème est admise. L'idée, par exemple pour une fonction croissante, est de montrer que f a pour limite $\sup(f(I))$ au bord droit de I (qui peut être $+\infty$) et a pour limite $\inf(f(I))$ au bord gauche de I (qui peut être $-\infty$). □

Théorème 5.34. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa réciproque est strictement monotone et continue.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que f est strictement croissante. On remarque d'abord que f est injective, puisque si $x, y \in I$ avec $x < y$ alors $f(x) < f(y)$. Il s'agit donc d'une bijection de I vers $J = f(I)$, qui est un intervalle d'après la Proposition 5.28.

De plus sa réciproque est strictement monotone. En effet, pour $u, v \in J$ avec $u < v$, on a $u = f(f^{-1}(u)) < f(f^{-1}(v)) = v$ et donc $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, f^{-1} est strictement croissante.

Enfin, d'après le théorème précédent, f^{-1} admet des limites à gauche et à droite en tout point $x_0 \in J$, et

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f^{-1}(x).$$

Mais si $\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f^{-1}(x) < f^{-1}(x_0)$, comme f^{-1} est strictement croissante, elle ne peut pas prendre les valeurs comprises entre $\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(x_0)$, ce qui contredit le fait que $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle. Le raisonnement est similaire pour $\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f^{-1}(x)$, et on a donc

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f^{-1}(x),$$

ce qui veut dire que f^{-1} est continue en x_0. □

Remarque 5.35. *Ce théorème a par exemple été utilisé pour définir les fonction trigonométriques réciproques : la fonction* sin *est strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *avec* $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$, *et sa restriction à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *définit donc une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1,1]$, *de bijection réciproque* arcsin.

Exemple 5.36. *La fonction* $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ *pour tout* $x > 0$ *est strictement décroissante, et vérifie* $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Il s'agit donc d'une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $]0,+\infty[$.

Théorème 5.37. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Alors f est strictement monotone et induit une bijection de I sur $J = f(I)$, de réciproque strictement monotone et continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est strictement monotone, le reste du théorème étant une conséquence du théorème précédent. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x, x', y, y' \in I$ tels que $x < x'$, $f(x) \geqslant f(x')$, $y < y'$ et $f(y) \leqslant f(y')$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(tx + (1-t)y) - f(tx' + (1-t)y') \end{array}$$

est continu car composée de fonctions continues et vérifie $g(0) = f(y) - f(y') \leqslant 0$ et $g(1) = f(x) - f(x') \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$. En posant alors

$$z = t_0 x + (1-t_0)y \quad \text{et} \quad z' = t_0 x' + (1-t_0)y',$$

on a $z < z'$ et $f(z) = f(z')$, ce qui est absurde puisque f est injective. $\square$

Bibliographie

[1] Cours de première année disponible en ligne sur le site `https://les-mathematiques.net/serveur_cours/section/2/`

[2] J.P. Ramis, A Warusfel, X. Buff, J Garnier, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, J. Sauloy, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*, Dunod, 3ème édition, 2018.

[3] Notes de cours d'analyse 1 pour Informaticiens de Guillaume Aubrun.