

Contrôle terminal

Mercredi 14 janvier 2026 – Durée : 2h.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. $e^{4n}n^4 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^{2n})$.

Solution: Vrai. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{e^{4n}n^4}{n^{2n}} = \frac{e^{4n}}{n^n} \cdot \frac{n^4}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

puisque $\frac{e^{4n}}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{n^4}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

2. $n \cos(n!) + (2n+1)^2 = O_{n \rightarrow +\infty}(n^2)$.

Solution: Vrai. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n \cos(n!) + (2n+1)^2}{n^2} = \frac{\cos(n!)}{n} + 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2},$$

et puisque $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left| \frac{\cos(n!)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$\frac{n \cos(n!) + (2n+1)^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4.$$

3. Pour tout $x \in [-2, 1]$ on a $4 - |x| \geq 3$.

Solution: Faux. Lorsque $x = -2$ on a $4 - |x| = 4 - 2 = 2$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0$.

Solution: Faux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc implique que $\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, on a

$$\frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Puisque $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty$, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = -\infty.$$

Exercice 2 : On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}, \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2}.$$

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{(n+1)^3 n^2} \\ &= \frac{n^2 + n^3 + n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3 n^2} \\ &= -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2}. \end{aligned}$$

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Solution: On a déjà démontré dans la question 1. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. D'après la question 2. on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2} < 0,$$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes. Elles sont donc toutes deux convergentes et ont la même limite.

Exercice 3 : 1. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 2x + 2.$$

- (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution: On a, pour tout x réel non nul,

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right).$$

Comme $\frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. De même $1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

- (b) Calculer la dérivée de f pour tout x réel. En déduire le tableau de variations de f .

Solution: Pour tout x réel on a

$$f'(x) = 2x - 2.$$

On obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

(c) Déterminer $f([1, 2])$.

Solution: Comme f est croissante et continue sur $[1, 2]$ (puisque de dérivée positive sur cet intervalle), on obtient $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [1, 2]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en choisissant un réel $u_0 \in [1, 2]$ et en définissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.

Solution: On considère la propriété $H_n : "u_n \in [1, 2]"$. On montre par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Concernant l'initialisation, $u_0 \in [1, 2]$ par hypothèse, donc H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que H_n est vraie. On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$, et d'après la question précédente $f([1, 2]) = [1, 2]$, on a donc bien $u_{n+1} \in [1, 2]$. On en déduit que H_{n+1} est vraie. Ainsi, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2.$$

Le discriminant du polynôme $X^2 - 3X + 2$ est $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$, ses deux racines sont $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1).$$

Comme, d'après la question précédente, $u_n \in [1, 2]$, on a $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n - 1 \geq 0$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et, en fonction de la valeur de $u_0 \in [1, 2]$, déterminer sa limite.

Solution: Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 elle converge un réel ℓ . Sa limite ℓ satisfait

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell - 1) = 0.$$

Donc $\ell = 2$ ou $\ell = 1$. Si $u_0 = 2$ on remarque que $u_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc en particulier $\ell = 2$. Si $u_0 \in [1, 2[$, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante elle ne peut pas converger vers 2, et donc $\ell = 1$.

Exercice 4: Soient un réel $\ell \geq 0$ et une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant

$$f(2x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 0$ il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ on a

$$f(2x) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Solution: Comme $f(2x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $B \geq 0$ tel que si $x \geq B$ on a

$$\ell - \varepsilon \leq f(2x) - f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ et $A = B + 1$ (pour être sûr que $A > 0$). On a bien, pour tout $x \geq A$, puisque dans ce cas $x \geq B$,

$$f(2x) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

2. En déduire que si $\ell > 0$ on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(2^k A) - f(2^{k-1} A) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Solution: Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $2^{k-1} A \geq A$ (on utilise ici le fait que $A \geq 0$) et donc, d'après la question précédente, en prenant $x = 2^{k-1} A$, on a

$$f(2^k A) - f(2^{k-1} A) \geq \frac{\ell}{2}.$$

3. A l'aide de la question précédente montrer que si $\ell > 0$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(2^n A) - f(A) \geq \frac{n\ell}{2}.$$

Solution: En sommant les inégalités données par la question précédente pour k allant de 1 à n on obtient

$$\sum_{k=1}^n (f(2^k A) - f(2^{k-1} A)) = \sum_{k=1}^n \frac{\ell}{2}.$$

La somme du membre de gauche est télescopique, et on obtient

$$f(2^n A) - f(A) \geq \frac{n\ell}{2}.$$

4. On suppose que f est bornée. Montrer que $\ell = 0$.

Solution: Si l'on suppose $\ell > 0$ on a, d'après la question précédente (on utilise ici le fait que $A > 0$), $f(2^n A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit le fait que f est bornée. On en déduit que $\ell = 0$.