

Contrôle terminal

Mercredi 14 janvier 2026 – Durée : 2h.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. $e^{4n}n^4 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^{2n})$.
2. $n \cos(n!) + (2n+1)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(n^2)$.
3. Pour tout $x \in [-2, 1]$ on a $4 - |x| \geq 3$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0$.

Exercice 2 : On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}, \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2}.$$

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 : 1. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 2 \end{array}.$$

- (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - (b) Calculer la dérivée de f pour tout x réel. En déduire le tableau de variations de f .
 - (c) Déterminer $f([1, 2])$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en choisissant un réel $u_0 \in [1, 2]$ et en définissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

- (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.
- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et, en fonction de la valeur de $u_0 \in [1, 2]$, déterminer sa limite.

Exercice 4 : Soient un réel $\ell \geq 0$ et une fonction $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant

$$f(2x) - f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 0$ il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ on a

$$f(2x) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

2. En déduire que si $\ell > 0$ on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(2^k A) - f(2^{k-1} A) \geq \frac{\ell}{2}.$$

3. A l'aide de la question précédente montrer que si $\ell > 0$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(2^n A) - f(A) \geq \frac{n\ell}{2}.$$

4. On suppose que f est bornée. Montrer que $\ell = 0$.