

Contrôle partiel – Sujet blanc

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et B une partie de $\mathbb{R}$. Donner la définition de $f^{-1}(B)$.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x - 2| + |x + 2| > 5$.

Solution : On étudie cette inéquation sur les intervalles $] -\infty, -2]$, $] -2, 2]$ et $]2, +\infty[$.

- Pour tout x dans $] -\infty, -2]$ on a $|x - 2| + |x + 2| = -(x - 2) - (x + 2) = -2x$. Or $-2x > 5$ si et seulement si $x < -\frac{5}{2}$. Ainsi pour tout x dans $] -\infty, -2]$ on a $|x - 2| + |x + 2| > 5$ si et seulement si $x \in] -\infty, -5/2[$.
- Pour tout x dans $] -2, 2]$ on a $|x - 2| + |x + 2| = -(x - 2) + x + 2 = 4$. Mais comme $4 < 5$, aucun réel x de $] -2, 2[$ n'est solution de l'inéquation $|x - 2| + |x + 2| > 5$.
- Pour tout x dans $]2, +\infty[$ on a $|x - 2| + |x + 2| = x - 2 + x + 2 = 2x$. Or $2x > 5$ si et seulement si $x > \frac{5}{2}$. Ainsi pour tout x dans $]2, +\infty[$ on a $|x - 2| + |x + 2| > 5$ si et seulement si $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 2| + |x + 2| > 5$ est $] -\infty, -\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[$.

Exercice 3 : Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$h(x) = (x^2 + x^9)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2}{(\ln(x))^3 + x^2}.$$

Solution : On a, pour tout x réel,

$$h(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x^9}{e^x},$$

et comme, par croissance comparée, $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{x^9}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

Pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2} \frac{1 + 2x^{-2}}{(\ln(x))^3 x^{-2} + 1} = \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{(\ln(x))^3}{x^2} + 1},$$

et comme $\frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors que $\frac{(\ln(x))^3}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

Exercice 4 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{2 + \sin^2(x)}.$$

1. Calculer, pour x réel, $f(-x)$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?

Solution : On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{\sin(-3x)}{1 + \sin^2(-x)} = \frac{-\sin(3x)}{2 + (-\sin(x))^2} = \frac{-\sin(3x)}{2 + (\sin(x))^2} = -f(x).$$

f est donc impaire.

2. Montrer que f est 2π -périodique. f est-elle injective ?

Solution: On a, pour tout x réel,

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(3x+6\pi)}{2+\sin^2(x+2\pi)} = f(x),$$

puisque $x \mapsto \sin(x)$ est 2π -périodique. En particulier on a $f(0) = f(2\pi)$, f n'est pas injective.

3. Montrer que pour tout x réel on a

$$2 + \sin^2(x) \geq 2,$$

et en déduire que, pour tout x réel,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

f est-elle surjective ?

Solution: Pour tout x réel on a $\sin^2(x) > 0$ et donc $2 + \sin^2(x) \geq 2$. Cela implique que $0 < \frac{1}{2+\sin^2(x)} \leq \frac{1}{2}$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$). Comme, pour tout x réel, on a $\sin(x) \leq 1$, on en déduit

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{2 + \sin^2(x)} \leq \frac{1}{2 + \sin^2(x)} \leq \frac{1}{2}.$$

En particulier 1 n'a pas d'antécédent par f . f n'est donc pas surjective.

4. Déterminer l'ensemble des réels où f est dérivable et calculer sa dérivée.

Solution: $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto 2 + \sin^2(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, et on a de plus $2 + \sin^2(x) > 0$ pour tout x réel. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a (en utilisant en particulier que le fait que si $u(x) = \sin(3x)$ et $v(x) = 2 + (\sin(x))^2$, alors $u'(x) = 3\cos(x)$ et $v'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\cos(3x)(2 + \sin^2(x)) - \sin(3x)(2\cos(x)\sin(x))}{(2 + \sin^2(x))^2} \\ &= \frac{6\cos(3x) + 3\cos(3x)\sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x)\sin(3x)}{(2 + \sin^2(x))^2}. \end{aligned}$$

Exercice 5: 1. Montrer que pour tout x réel on a

$$1 + x^2 \geq 2x, \quad \text{et} \quad 1 + x^2 \geq -2x.$$

Solution: Pour tout x réel on a $1 + x^2 - 2x = (1 - x)^2 \geq 0$, et donc $1 + x^2 \geq 2x$. De même, pour tout x réel, $1 + x^2 + 2x = (1 + x)^2 \geq 0$, et donc $1 + x^2 \geq -2x$.

2. En déduire que pour tout x réel on a

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Solution: D'après la question précédente, on a pour tout x réel,

$$-(1 + x^2) \leq 2x \leq 1 + x^2.$$

En multipliant par $\frac{1}{1+x^2}$ qui est strictement positif, on obtient bien

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

3. Résoudre, pour x réel, l'équation $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Solution: D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$, et donc, comme la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est définie sur $[-1, 1]$, la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective de bijection réciproque $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, on a, pour tout x réel, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$ si et seulement si

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-4)^2 - 4(\sqrt{3})^2 = 4$ et ses racines sont donc $x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. L'équation $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$ a donc pour ensemble de solutions $S = \{\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$.