

Contrôle partiel – Sujet blanc

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et B une partie de $\mathbb{R}$. Donner la définition de $f^{-1}(B)$.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x - 2| + |x + 2| > 5$.

Exercice 3 : Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$h(x) = (x^2 + x^9)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2}{(\ln(x))^3 + x^2}.$$

Exercice 4 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{2 + \sin^2(x)}.$$

1. Calculer, pour x réel, $f(-x)$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?
2. Montrer que f est 2π -périodique. f est-elle injective ?
3. Montrer que pour tout x réel on a

$$2 + \sin^2(x) \geq 2,$$

et en déduire que, pour tout x réel,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

f est-elle surjective ?

4. Déterminer l'ensemble des réels où f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 5 : 1. Montrer que pour tout x réel on a

$$1 + x^2 \geq 2x, \quad \text{et} \quad 1 + x^2 \geq -2x.$$

2. En déduire que pour tout x réel on a

$$-1 \leq \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1.$$

3. Résoudre, pour x réel, l'équation $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$.