Contrôle partiel

Lundi 3 novembre 2025 – Durée : 1h30.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et A une partie de $\mathbb{R}$. Donner la définition de $f(A)$.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x+2| < 4$.

Solution: On étudie cette inéquation sur les intervalles $]-\infty,-2]$, $]-2,1]$ et $]1,+\infty[$.

— Pour tout x dans $]-\infty,-2]$ on a $|x-1|+|x+2| = -(x-1)-(x+2) = -2x-1$. Or $-2x-1<4$ si et seulement si $x > -\frac{5}{2}$. Ainsi pour tout x dans $]-\infty,-1]$ on a $|x-1|+|x+2| < 4$ si et seulement si $x \in]-5/2,-2]$.

— Pour tout x dans $]-2,1]$ on a $|x-1|+|x+2| = -(x-1)+x+2 = 2$. Mais comme $3<4$, tous les réel x de $]-1,1[$ sont solution de l'inéquation $|x-1|+|x+2|<4$.

— Pour tout x dans $[1,+\infty[$ on a $|x-1|+|x+2| = x-1+x+2 = 2x+1$. Or $2x+1<4$ si et seulement si $x < \frac{3}{2}$. Ainsi pour tout x dans $[1,+\infty[$ on a $|x-1|+|x+2|<4$ si et seulement si $x \in [1, \frac{3}{2}[$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-1|+|x+2|<4$ est $]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}[$.

Exercice 3 : 1. Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (1+x^4)e^{-x}, \quad g(x) = \frac{x\sqrt{x}-x}{2x^3+x^2+1}, \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{(\ln(x))^{1000}+1}{x+1}.$$

Solution: Comme $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x^4e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Concernant g, on a pour tout $x>0$,

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^3} \cdot \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}},$$

et $\frac{1}{x\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Concernant h on a

$$h(x) = \frac{(\ln(x))^{1000}}{x} \cdot \frac{1+\frac{1}{(\ln(x))^{1000}}}{1+\frac{1}{x}},$$

et comme $\frac{(\ln(x))^{1000}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée, alors que $\frac{1}{(\ln(x))^{1000}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2. Déterminer l'ensemble des réels où les fonctions suivantes sont dérivables, et calculer leur dérivée.

$$u(x) = \sin(1+x^2), \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}.$$

Solution: u est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque définie comme composée de fonction usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout x réel,

$$u'(x) = 2x\cos(1+x^2).$$

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto 1+x^2$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x réel on a

$$v'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x^2) - \sqrt{x}2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(1+x^2)^2}.$$

Exercice 4 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+e^{x^2}}.$$

1. Calculer $f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?

   Solution: On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1+e^{(-x)^2}} = \frac{1+(x)^2}{1+e^{(x)^2}} = f(x).$$

   f est donc paire.

2. Justifier que f n'est pas injective.

   Solution: D'après la question précédente on a $f(1) = f(-1)$. f n'est donc pas injective.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geq 0$. La fonction f est-elle surjective ?

   Solution: Pour tout x réel on a $1+x^2 \geq 0$ et $e^{x^2} > 0$ et donc $1+e^{x^2} > 0$. On en déduit que $f(x) > 0$ pour tout x réel. Ainsi -1 n'a pas d'antécédent par f, f n'est donc pas surjective.

4. Déterminer l'ensemble des réels où f est dérivable et calculer la dérivée de f.

   Solution: $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale, $x \mapsto 1+e^{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est définie par des sommes et compositions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus on a $1+e^{x^2} > 0$ pour tout x réel. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

   $$f'(x) = \frac{2x(1+e^{x^2}) - (1+x^2)2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x\frac{1-x^2e^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}.$$

Exercice 5 : 1. Déterminer les réels x solutions de l'équation

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

   Solution: Le discriminant du polynôme est $\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9$, on obtient donc comme solutions de l'équation $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = -1$.

2. Déterminer les réels x solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

   Solution: Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Déterminer les réels x solutions de l'équation $\cos(x) = -1$.

   Solution: Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\cos(x) = -1$ si et seulement si $x \in \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(2x) + \cos(x) = 0$.

   Solution: Puisque, pour tout x réel on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on a $\cos(2x) + \cos(x) = 0$ si et seulement si $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$. D'après la première question cela équivaut donc à $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -1$. D'après les deux questions précédentes, l'ensemble des solutions est donc

   $$\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$