Feuille 4 : Limites de fonctions et Continuité

Exercice 1 : (Une fonction définie par morceaux). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to -1, x<-1} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to \pi, x<\pi} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1, x>-1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to \pi, x>\pi} f(x)$

3. Étudier les limites de f en -1, en 0 et en π.

Exercice 2 : (Limites). Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$
8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^x$

Exercice 3 : (Limites et taux d'accroissement). On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que, plus généralement, si f est une fonction dérivable en x_0, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \sqrt{x}\ln^3 x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Exercice 4 : (Partie entière). Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 5 : (Une limite à partir d'une autre). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 5$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 6 : (Continuité à droite et à gauche). Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 7 : (Limites et continuité).

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Exercice 8 : (Nombre de solutions d'une équation). Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 9 : (Solution d'une équation). Montrer que l'équation $\tan x + \dfrac{x}{3} = 0$ admet une unique solution sur $[3\pi/4, \pi]$.

Exercice 10 : (Etude de fonction). Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.
2. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 11 : (Suite récurrente). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Vérifier en particulier que $f([1,+\infty[) = [1, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 : (Une autre suite récurrente). On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13 : (Surjection). Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 14 : (Image d'un intervalle. Vrai ou faux ?).

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 15 : (Fonction périodique).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 16 : (Encore des limites). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x-\sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7. $\lim_{x\to 1+} \ln x \ln(\ln x)$
8. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 17 : (Etude d'une fonctions trigo). Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 18 : (Limites et variations). Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 19 : (Sur les fonctions périodiques). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 20 : (Polynômes de degré impair). Soit n un entier et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ des réels. On supposera a_n non nul.

1. Si n est impair montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 21 : (Continuité sur un intervalle stable). Supposons que f est une fonction continue sur $[0,1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 22 : (Fonction définie par intervalles). Étudier la continuité de la fonction $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 23 : (Partie entière et continuité). Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 24 : (Raccordements). Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie sur $]-\infty, 3]$ par $g_m(x) = x - m$ et sur $]3, +\infty[$ par $g(x) = 1 - mx$, est une fonction continue.

Exercice 25 : (Fonctions continues à valeurs discrètes). Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 26 : (Continuité et bornes). Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 27 : (Continuité et valeur absolue). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle l'implication $(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|)$ est vraie.
2. Remarquer que, pour tout x de I, on a $\sup(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ et en déduire que, si f et g sont continues, alors la fonction $\sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.