Feuille 4 : Limites de fonctions et Continuité

Exercice 1 : (Une fonction définie par morceaux). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to -1, x<-1} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to \pi, x<\pi} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1, x>-1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to \pi, x>\pi} f(x)$

3. Étudier les limites de f en -1, en 0 et en π.

Solution: Par définition de f, on a :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(-2x) = 2\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^2+1) = 2\,.$$

De façon analogue, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sin(x/4) = 0$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-}\sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,, \qquad \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+}\sin(x/4) = \sqrt{2}/2\,.$$

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limite (b) n'existe pas.

Exercice 2 : (Limites). Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$
8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^x$

Solution:

1. $-\infty$.
2. Il faut mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres. On trouve donc que la limite vaut 1.
3. On a $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, d'où
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4\,.$$
4. Décomposer $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et simplifier pour trouver $3/2$.
5. La limite n'existe pas : étudier la limite quand $x \to 4^-$ et $x \to 4^+$.
6. 0.

7. $+\infty$.
8. $1/4$.
9. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}+1$, on trouve que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{(1+x)-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x},$$

d'où on trouve que la limite n'existe pas ($x \to 0^+$ et $x \to 0^-$).

10. On a

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)},$$

d'où c'est simple à voir que la limite n'existe pas.

11. 0.
12. On écrit

$$x^x = e^{x \ln x} \longrightarrow_{x \to 0^+} e^0 = 1.$$

(si on a oublié la limite de $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \ln x$, on peut le retrouver à partir de $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ avec un changement de variable $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui donne $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln 1/x}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$)
Attention, on serait tenté d'appliquer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^n = 0$ mais cela ne fonctionne qu'avec un exposant constant.

Exercice 3 : (Limites et taux d'accroissement). On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que, plus généralement, si f est une fonction dérivable en x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$
5. $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2 + x - 1)\tan(\pi x)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \sqrt{x} \ln^3 x$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Solution:

1. On a

$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(2x)}{2x} 2\sqrt{x} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } x \to 0.$$

2. Du moment que $\sin x/x \to 1$ quand $x \to 0$ et que $x \sin(1/x) \to 0$, on a que la deuxième limite vaut 0.
3. Par définition de la fonction tan, on a

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} \qquad \text{avec } \cos(0) = 1 \text{ et } \sin(x)/x \to 1 \text{ quand } x \to 0.$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

4. On change la variable en posant $1 - 2x = y$, et donc $x = (1-y)/2$. En utilisant que $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ (faire un dessin pour le montrer), on a

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)}{\frac{\pi}{2} y} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. On remarque que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1/2} 2x^2 + x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1/2} \tan(\pi x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1/2} \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = +\infty$. On a une forme indéterminée que l'on va résoudre en extrayant un facteur qui tend vers 0 dans $2x^2 + x - 1$ et en faisant apparaitre un sin (à partir du cos, via une rotation de $\pi/2$) au dénominateur pour appliquer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On commence par noter que $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$. On pose alors $2x - 1 = y$,

d'où $x = (1+y)/2$. Grâce aux formules $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x) &= \lim_{y\to 0} y\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2}(3+y)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\frac{-(3+y)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = -\frac{3}{\pi}.
\end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2\,(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{-1}{1+\cos x} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad \text{quand } x\to 0.$$

7. Quand $x\to 0$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\frac{x^2}{\sin^2 x} \longrightarrow 1.$$

8. La limite vaut 0 par croissances comparées.
9. On a $x^n = \exp(n\ln x)$, d'où on trouve

$$\frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \exp\left(\ln x\big(\ln x - n\big)\right).$$

On en déduit que la limite vaut $+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4 : (Partie entière). Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} E(x+1)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Solution:

1. Comme la fonction partie entière est continue à droite au point 1, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} E(x+1) = E(1) = 1$.
2. Pour tout $x>0$ on a $\displaystyle\frac{1}{x}-1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$, et donc $\displaystyle 1-x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x) = 1$, par théorème des gendarmes on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
3. On commence par étudier la continuité en 0. Si $x>0$, par définition de partie entière on a $E(1/x) \le 1/x < E(1/x)+1$, qui implique que

$$0 \le xE(1/x) \le 1 < xE(1/x) + x \le 1+x.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve alors que $xE(1/x)\to 1$ pour $x\to 0^+$. La même inégalité de départ montre, en inversant les signes d'inégalité quand on multiplie par x, que aussi la limite pour $x\to 0^-$ vaut 1. Donc la fonction est continue en 0.
Après, on remarque que pour tout $x>1$ on a $E(1/x)=0$, ce qui implique que $f(x)=0$ pour tout $x>1$. Alors on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$. En revanche, quand $x\to 1^-$ on a $E(1/x)=1$, d'où on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$. Donc, f n'est pas continue en 1, mais continue à droite. Le même argument montre que les points $1/n$, avec $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, sont des points de discontinuité et continuité à droite pour f.
Enfin, la continuité de f pour les $x<0$ peut être déduite du discours précédent, en utilisant que, pour tout $x>0$, on a $E(-x) = -E(x)-1$.

Exercice 5 : (Une limite à partir d'une autre). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2} = 5$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

2. On suppose que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Solution: La première limite vaut 5, la deuxième vaut 0. Pour le voir, on peut :

— soit raisonner par l'absurde : si le numérateur ne tend pas à 0, la limite ne peut pas être finie (car le dénominateur tend à 0) ;

— soit utiliser la définition de limite.

Exercice 6 : (Continuité à droite et à gauche). Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Solution:

1. Pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = x^2$ coïncide avec une fonction continue, donc elle est continue en tout point de $]0,1[$; le même argument s'applique à tout point dans $]1,2[$. En plus, pour la même raison on a que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0)$, donc f est continue à droite en 0 ; de façon pareil, on voit que f est continue à gauche en 2. Finalement, on a
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} (2x-1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1\,,$$
donc f est continue aussi en 1.
2. Le même argument que celui de l'exercice précédent montre que g est continue en tout point $x \neq 0$. Considérons maintenant le cas $x = 0$. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1\,.$$
On en déduit que g n'est pas continue en 0, mais continue à droite.

Exercice 7 : (Limites et continuité).

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Solution:

1. Pour $x \neq 2$, la fonction est clairement continue, il faut donc juste choisir le k de manière que les deux termes coïncident à $x = 2$, c'est-à-dire $2^2 = k - 2^2$ ou bien $k = 8$. La seule valeur k telle que f_k est une fonction continue vaut donc 8.
2. Comme $1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$, la fonction $g(x) = x^2 - x + 1$ est continue et coïncide avec f pour $x \neq -1$.

Exercice 8 : (Nombre de solutions d'une équation). Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Solution: On calcule les valeurs de polynômes sur les bords de l'intervalle et pour des arguments simples :
Pour $x = -4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = -3 < 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $1 > 0$.
Pour $x = 1$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 1 - 15 + 1 < 0$.
Pour $x = 4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = 5 > 0$
Par la continuité de polynôme et le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc une solution dans $]-4,0[$, une solution dans $]0,1[$ et une solution dans $]1,4[$, donc au moins 3 solutions. Pour être rigoureux, si on interprète le « trois solutions » de l'énoncé comme « exactement trois », il faut ajouter que c'est une équation du troisième degré qui a donc au plus trois racines.

Exercice 9 : (Solution d'une équation). Montrer que l'équation $\tan x + \frac{x}{3} = 0$ admet une unique solution sur $[3\pi/4, \pi]$.

Solution: On évalue l'expression à $x = 3\pi/4$ et à $x = \pi$ et on trouve $-1 + \pi/4 < 0$ et $\pi/3 > 0$. Comme la dérivée de $x \mapsto \tan x + \frac{x}{3}$ est strictement positive sur $]3\pi/4, \pi[$ cette fonction induit une bijection de $[3\pi/4, \pi]$ vers $[-1/4, \pi/3]$, il existe en particulier un unique antécédent de 0 par cette fonction.

Exercice 10 : (Etude de fonction). Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.
2. En déduire le tableau de variations de f.

Solution:

1. g est définie et dérivable (car composée de fonctions dérivables) sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a
$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$
On obtient le tableau de variations suivant.

	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et comme elle est continue elle induit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe ainsi un unique $x_0 \in]0, +\infty[$ satisfaisant $g(x_0) = 0$.

2. f est définie et dérivable (car composée de fonctions dérivables) sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} g(x).$$
Le signe de f' est donc le même que le signe de g sur $]0, +\infty[$, et on en déduit le tableau de variations.

	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 11 : (Suite récurrente). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x - 1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Vérifier en particulier que $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution:

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On a $f(1) = 1$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
2. On raisonne par récurrence : on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :« u_n existe et appartient à $[1, +\infty[$ ».
[Initialisation]. $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 \geq 1$.
[Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Alors u_n appartient à $[1, +\infty[$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
[Conclusion]. La propriété est initialisée à $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$: la suite (u_n) est bien définie et, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq 1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n + 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 1} + u_n} \\
&= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\
&= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note ℓ sa limite. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est continue, en passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$.
$\ell = \sqrt{2\ell - 1} \iff \ell^2 = 2\ell - 1$ et $\ell \geq 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0$ et $\ell \geq 0 \iff \ell = 1$.

Exercice 12 : (Une autre suite récurrente). On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution:

1. Par récurrence posons P_n : "$0 \leq u_n \leq 2$".
Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 1 \in [0, 2]$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.
On a $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Comme $u_n \geq 0$ alors $1 + u_n \geq 0$. Donc u_{n+1} existe, $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$. Donc P_{n+1} est vraie et ainsi P_n est héréditaire.
Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit R_n : "$u_n < u_{n+1}$". Montrons que R_n est vraie par récurrence.
R_0 : "$u_0 < u_1$". Donc R_0 : "$1 < \sqrt{2}$". Ainsi R_0 est vraie.
Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons R_n vraie.
Montrons que R_{n+1} : "$u_{n+1} < u_{n+2}$" est vraie.
Comme R_n est vraie alors $u_n < u_{n+1}$, donc $1 + u_n < 1 + u_{n+1}$ et par suite $\sqrt{1 + u_n} < \sqrt{1 + u_{n+1}}$. Ainsi $u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc R_{n+1} est vraie.
En conclusion R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue, en passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient $\ell = \sqrt{1 + \ell}$. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\ell \geq 0$.
On a $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 5$. Donc les deux racines sont $\ell_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On remarque que $\ell_1 < 0$. Donc ℓ_1 ne convient pas. On a bien $\ell_2 \geq 0$, donc c'est la seule limite possible. Ainsi $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 13 : (Surjection). Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}$. Par la limite vers $-\infty$, il existe forcement une valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que $a < 0$ et $f(a) < y$. Par la limite vers ∞, il existe forcement une valeur $b \in \mathbb{R}$ telle que $b > 0$ et $f(b) > y$.
Par la continuité de f et le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y$. Comme y était un réel arbitraire, la fonction f est bien surjective.

Exercice 14 : (Image d'un intervalle. Vrai ou faux ?).

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.

2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a,b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Solution:

1. Vrai. La fonction admet un minimum et un maximum et par le théorème des valeurs intermédiaires atteint aussi tout l'intervalle $[\min, \max]$.
2. Faux. Contre-exemples : f la fonction constante qui ne donne pas un intervalle ouvert. $f(x) = 1/x$ sur $]0,1[$ qui n'est pas bornée.
3. Faux. Contre-exemple : fonction constante.
4. Vrai. Intuitivement : La fonction atteint toutes les valeurs entre $\inf\{f(x)\}$ et $\sup\{f(x)\}$ par le théorème des valeurs intermédiares ce qui donne toujours un intervalle qui pourrait avoir des bornes $\pm\infty$ ou inclure ses bornes si la fonction admet un minimum ou maximum. Plus formellement : par définition, $f([a,b])$ est un intervalle ssi $\forall x, y \in f([a,b]), \forall m \in [x,y], m \in f([a,b))$. Soient $x, y \in f([a,b])etm \in [x,y]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, $\exists p \in [a,b], f(p) = m$, donc $m \in f([a,b])$.

Exercice 15 : (Fonction périodique).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Solution:

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. D'après le cours la restriction de f à l'intervalle $[0,T]$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [0,T]$, $m \leq f(x) \leq M$ et $x_1, x_2 \in [0,T]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$. Il reste à montrer que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. En définissant $k = E(x/T)$, où E désigne la fonction partie entière, on a $k \leq \dfrac{x}{T} \leq k+1$, et donc $x - kT \in [0,T]$. Mais alors, comme $f(x) = f(x-kT)$ on en déduit bien que $m \leq f(x) \leq M$.
2. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^8 x + \cos^{14} x$. f est 2π-périodique, et donc d'après la question précédente f est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M.$$

De plus on a clairement $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on a $(\sin^8 x \geq 0$ et $\cos^{14} x \geq 0$, et lorsque l'un des deux vaut 0 l'autre est non nul), et donc en particulier $m > 0$. On en déduit que pour tout $x > 0$

$$\frac{\ln x}{Mx} \leq \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} \leq \frac{\ln x}{mx},$$

et donc, puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par théorème de comparaison, on a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} = 0$ par théorème des gendarmes.

Exercices supplémentaires

Exercice 16 : (Encore des limites). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7. $\lim_{x\to 1+} \ln x \ln(\ln x)$
8. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 17 : (Etude d'une fonctions trigo). Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 18 : (Limites et variations). Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 19 : (Sur les fonctions périodiques). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 20 : (Polynômes de degré impair). Soit n un entier et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ des réels. On supposera a_n non nul.

1. Si n est impair montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 21 : (Continuité sur un intervalle stable). Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 22 : (Fonction définie par intervalles). Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 23 : (Partie entière et continuité). Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 24 : (Raccordements). Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie sur $]-\infty, 3]$ par $g_m(x) = x - m$ et sur $]3, +\infty[$ par $g(x) = 1 - mx$, est une fonction continue.

Exercice 25 : (Fonctions continues à valeurs discrètes). Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 26 : (Continuité et bornes). Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 27 : (Continuité et valeur absolue). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle l'implication $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|)$ est vraie.
2. Remarquer que, pour tout x de I, on a $\sup(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ et en déduire que, si f et g sont continues, alors la fonction $\sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.