Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1 : (Recherche par dichotomie). À l'aide d'un ordinateur, on cherche un élément dans un tableau trié (par exemple, un mot dans un dictionnaire alphabétique pouvant ne pas le contenir). Pour simplifier, supposons qu'à chaque étape le tableau contienne un nombre impair d'éléments. On compare alors l'élément central à l'élément recherché : s'il correspond, la recherche s'arrête ; sinon, on conserve uniquement la moitié du tableau où le mot pourrait encore se trouver, selon l'ordre, et l'on répète le processus sur cette partie.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note u_n la taille des tableaux triés dans lesquels on est capable de rechercher un élément par dichotomie en n étapes. Que vaut u_1 ? Trouver une relation de récurrence reliant u_{n+1} à u_n.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
3. En utilisant les questions précédentes, exprimer u_n en fonction de n.
4. En combien d'étapes peut-on rechercher un élément dans un tableau de taille 1 To (moins 1) ?

Solution:

1. On a $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (à chaque étape on est capable de gérer des tableaux du double de la taille des précédents, plus le terme du milieu).
2. Pour tout $n \geq 1$ on a
$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n.$$
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison 2 (mais indicée pour $n \geq 1$), et on en déduit, pour tout $n \geq 1$,
$$v_n = 2^{n-1}v_1 = 2^{n-1}(1 + 1) = 2^n.$$
3. En utilisant les questions précédentes on obtient, pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = v_n - 1 = 2^n - 1.$$
4. Rappel : $1\,\text{Ko} = 1024\,\text{octets} = 2^{10}\,\text{octets}$, $1\,\text{Mo} = 1024^2\,\text{octets} = 2^{20}\,\text{octets}$, $1\,\text{Go} = 1024^3\,\text{octets} = 2^{30}\,\text{octets}$, $1\,\text{To} = 1024^4\,\text{octets} = 2^{40}\,\text{octets} \approx 10^{12}\,\text{octets}$. Il suffit donc de 41 étapes pour rechercher un élément dans un tableau trié de 1 To. En toute rigueur, on peut distinguer les téraoctets (To) qui suivent la règle du système international Tera $= 10^{12}$ et les tébioctets (Tio) de 2^{40} octets, mais 1) ça ne change pas l'ordre de grandeur, et 2) dans le langage courant d'un informaticien, terraoctet est souvent un abus de langage pour tébioctet.

Exercice 2 : (Variations). Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n - 2^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
6. $u_n = n - \sinh(n)$.

Solution:

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.
Donc pour tout $n \geq 1$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0$$
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

2. $u_n = n - 2^n$.
   Pour tout $n \geq 0$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = (n+1) - 2^{n+1} - n + 2^n = 1 - 2^n(2-1) \leq 0$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (et même strictement décroissante à partir du rang 1).
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
   Pour tout $n \geq 0$, u_n est strictement positif, et on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}.$$
   Cette suite n'est pas monotone car u_{n+1}/u_n est supérieur à 1 pour $n = 0$ et $n = 1$, et inférieur à 1 pour tout $n \geq 2$. Elle est strictement décroissante à partir du rang 2.
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
   Pour tout $n \geq 0$ on a $u_n > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{2n+1}{2n} \cdot (2n+2) > 1,$$
   et donc cette suite est strictement croissante.
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
   Pour tout $n \geq 0$, on a
$$u_n = 1 - \frac{4}{n+3}.$$
   La fonction $x \mapsto 1 - 4/(x+3)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.
6. $u_n = n - \sinh(n)$.
   Pour tout $n \geq 0$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - \sinh(n+1) - n + \sinh(n) = 1 - (\sinh(n+1) - \sinh(n)).$$
   La fonction $x \mapsto \sinh(x+1) - \sinh(x)$ est dérivable et de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$: elle est donc strictement croissante. En $x = 0$, on a $\sinh 1 - \sinh 0 \simeq 1.17$, donc pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n$ est négatif : la suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 3 : (Variations et bornes sup/inf). Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de $\sup\limits_n u_n$ et $\inf\limits_n u_n$.

1. $u_n = 2^n$
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
3. $u_n = 3^{-n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

Solution:

1. $u_n = 2^n$
   La suite (u_n) est strictement croissante. Elle est minorée par 1 et $\inf\limits_{\mathbb{N}} u_n = 1$ et n'est pas majorée :$\sup\limits_{\mathbb{N}} u_n = +\infty$.
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
   Pour tout $n \geq 0$, on a : $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n + \cos(n+1) - \cos n$.
   Pour $n = 0$: $u_1 - u_0 = 2 - 1 + cos(1) - cos(0) = cos(1) > 0$.
   Et pour tout $n \geq 1$: $2^{n+1} - 2^n \geq 3$ et $\cos(n+1) - \cos(n) \in [-2, 2]$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc strictement croissante.
   Elle n'est pas majorée (parce que pour tout n, $u_n \geq 2^n - 1$, et son inf égal à $u_0 = 2$.
3. $u_n = 3^{-n}$
   La suite (u_n) est strictement décroissante. Son inf est égal à 0 et son sup est égale à $u_0 = 1$.

4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$

   On peut calculer les premiers termes de (u_n) :

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{5} \qquad u_3 = \frac{1}{4} \ \cdots$$

   La suite (u_n) n'est donc pas monotone. Mais les suites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux strictement décroissantes :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k+3} \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = \frac{1}{2k+2}$$

   (u_{2k}) admet pour sup le réel $u_0 = 1/3$ et (u_{2k+1}) admet pour sup le réel $u_1 = 1/2$. Donc $\sup\limits_n (u_n) = 1/2$.

   De plus, les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) admettent 0 pour borne inf, donc $\inf\limits_n u_n = 0$.

5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

   Pour tout $k \geq 0$, on a :

$$u_{2k} = \frac{1}{4k+1} \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = \frac{1}{4k+1}$$

   On a donc : $u_{2k} = u_{2k+1} > u_{2k+2} = u_{2k+3}$.

   La suite (u_n) est donc décroissante (mais pas strictement décroissante).

   On a $\sup\limits_n u_n = u_0 = 1$ et $\inf\limits_n u_n = 0$.

Exercice 4 : (Des limites). Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
8. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
10. $u_n = \cos(n\pi)$
11. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
13. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
14. $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$
15. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}$

Solution:

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1} = \dfrac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1} = \dfrac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^3})} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4} = \dfrac{n^2(3-\frac{5}{n^2})}{n(1+\frac{4}{n})} = n.\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n\left(1+\frac{\sqrt{n+5}}{n}\right)}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{n+5}{n^2}}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.

   $n=\sqrt{n^2}$ car n est positif, donc $u_n = \dfrac{n(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1} = 1$.

6. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{+1}{\sqrt{n}}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{+1}{\sqrt{n}} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

8. On a $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. On a posé $h=\dfrac{1}{n}$.

   Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \dfrac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(2+\frac{(-1)^n}{n})} = \dfrac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$.

   $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = 0$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

10. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{2n}=1$ et $u_{2n+1}=-1$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

11. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = (-1)\dfrac{3^n-2^n}{3^n-2^n} = -1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}} = \dfrac{\exp(n\ln(2))}{\exp(100\ln(n))} = \exp(n\ln(2)-100\ln(n)) = \exp\left(n\left(\ln(2)-100\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

    Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2)-100\dfrac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0$.

    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

13. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos 0 = 1$.

14. On a $|u_n| \leq \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

    Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

15. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n}$.

    Ainsi u_n n'a pas de limite.

16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}$

    On utilise l'expression conjuguée : pour tout $n\geq 0$, on a :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}} \times \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}{(2n+1)-(2n+3)} = \frac{-1}{2}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}\right)$$

Donc (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 5 : $((\sin(n))_n)$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(\sin n)_n$ n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_n \sin n = \ell$.

1. En exprimant, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$, montrer que la suite $(\cos n)$ admet une limite $\tilde{\ell}$ et donner une relation entre ℓ et $\tilde{\ell}$.
2. Quelle autre relation existe-t-il entre ℓ et $\tilde{\ell}$?
3. Montrer que, pour tout n, on a $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$.
4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que $\ell = 0$.
5. Conclure.
6. Justifier que la suite $(\sin n)_n$ admet une suite extraite convergente.

Solution:

1. Soit n un entier naturel.
   On a $\sin(n+1) = \sin n \times \cos 1 + \cos n \times \sin 1$.
   Donc $\cos n = \dfrac{1}{\sin 1}(\sin(n+1) - \cos 1 \sin n)$.
   Or les suites $(\sin n)_n$ et $(\sin(n+1))_n$ admettent toutes les deux la même limite ℓ (si elle existe.
   On en déduit donc que la suite $(\cos n)$ converge vers $\tilde{\ell} = \dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}\ell$.
2. Pour tout n, on sait que $\cos^2 n + \sin^2 = n = 1$, donc, en passant à la limite, on obtient : $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$.
3. On développe le membre de gauche : pour tout $n \geq 0$, on a
   $$\sin(n+1) + \sin(n-1) = \sin n \ \cos 1 + \cos n \ \sin 1 + \sin n \ \cos 1 - \cos n \ \sin 1 = 2\sin n \ \cos 1.$$
4. Les suites $(\sin n)$, $(\sin(n+1))$ et $(\sin(n-1))$ convergent toutes trois vers ℓ : on a donc $2\ell = 2\cos 1\ell$, d'où $\ell = 0$.
5. Si ℓ est nul, alors $\tilde{\ell}$ est également nul.
   Or, on doit avoir $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$.
   D'où la contradiction.
6. La suite $(\sin n)$ est une suite bornée (pour tout n, u_n appartient à $[-1,1]$), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 6 : (Suite monotone). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :
   $$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$.

Solution:

1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2(n+1) + 2n + 1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{2n + 2 + 2n + 1 - 4n - 2}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
\end{aligned}$$

   Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, par suite $u_{n+1} > u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. Dans la définition de (u_n), on remarque que le terme le plus grand est $\dfrac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\dfrac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{gathered}
n\left(\frac{1}{2n}\right) < u_n < n\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
\frac{1}{2} < u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1
\end{gathered}$$

   Donc $\dfrac{1}{2} < u_n < 1$.
   Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite ℓ, et cette limite vérifie $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

3. Soit la suite $v_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ. On a $v_{2n} = v_n + u_n$.
   En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + \ell$. D'où $\ell = 0$. C'est impossible vu l'encadrement de ℓ dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 7 : (Suites presque géométriques).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Solution: 1.(a). Par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$10 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 10 + \varepsilon\,.$$

Alors, il suffit de prendre $\varepsilon = 5$ et $N = N_\varepsilon$, et utiliser le fait que u_n est positif.

2ème méthode :

Comme $\lim\limits_{\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$, alors à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$.
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n$.

1.(b). Par récurrence sur $n \geq N$.
Soit $P(n)$: "$u_n \geq 5^{n-N} u_N$".
$P(N)$: "$u_N \geq 5^0 u_N$". Donc $P(N)$ est vraie.
On suppose $P(n)$ vraie pour n fixé.
$P(n+1)$: "$u_{n+1} \geq 5^{n+1-N} u_N$".
On a $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N} u_N = 5^{n+1-N} u_N$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
En conclusion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq N$.
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

2ème méthode :
Pour tout $n \geq N+1$, on a :

$u_{N+1} \geq 5u_N$.
$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}$.
$\ldots$
$\ldots$
$\ldots$
$\ldots$
$u_n \geq 5u_{n-1}$.

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :
$u_n \geq 5^p u_N$
où p est le nombre de ces termes : $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots u_n$. On a $p = n - (N+1) + 1 = n - N$.
Donc $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
Or pour $n = N$, $u_n = u_N = 5^{n-N} u_N$".
Ainsi pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

1.(c). Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que $u_N > 0$ par hypothèse. En effet :
Comme N est fixé alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^{n-N} = +\infty$. Comme $u_N > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^{n-N} u_N = +\infty$. Or $u_n \geq 5^{n-N} u_N$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.(a). On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

2ème méthode :

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$, c'est à dire :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
Comme $u_n > 0$, alors :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

2.(b). En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Comme N est fixé et que $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$.

Comme $u_N > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$.

Or $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 8 : (Avec des ε). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Solution: Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe, il est facile de montrer qu'elle vaut 0, mais montrer que u_n converge demande plus de travail. On repasse par la définition des limites plutôt que d'utiliser les théorèmes de haut niveau :

On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon, \left|\frac{u_n}{1+u_n}\right| \leq \varepsilon$.

On veut montrer que $\forall \delta > 0, \exists N_\delta \in \mathbb{N}, \forall n > N_\delta, |u_n| \leq \delta$.

Soit ε un réel de $]0, 1[$. Par hypothèse, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right| \leq \varepsilon$.

On a donc, pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \varepsilon\ |1 + u_n| \leq \varepsilon(1 + |u_n|)$.

On obtient alors, pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Soit maintenant δ un réel strictement positif. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$.

Donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$.

On peut donc conclure que la limite (u_n) existe et est égale à 0.

Exercice 9 : (Rangs pairs et impairs).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Solution:

1. On peut utiliser le théorème des gendarmes : pour tout n, $u_{2\lfloor n/2\rfloor} \leq u_n \leq u_{2\lfloor n/2\rfloor+2}$

   Ou alors le faire à la main : On note ℓ la limite de la suite (u_{2n}).

   On sait que la suite (u_{2n}) est croissante, donc, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{2n} \leq \ell$.

   Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

   Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.

   On a alors : $0 \leq \ell - u_{2n} \leq \varepsilon$ et $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$,

   Donc $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$.

   Or la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n, on a $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.

   D'où : pour tout $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq \ell$, ce qui implique que

   $$|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon.$$

   Pour tout $k \geq 2N$, on a donc $|u_k - \ell[\leq \varepsilon$.

   On peut donc conclure la limite de (u_n) existe.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

   Par convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), il existe deux rangs N_1 et N_2 tels que :

   $$\text{Pour tout } n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$$
   $$\text{Et pout tout } n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

   Pour tout $k \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$.

   On peut donc conclure que la limite de la suite (u_n) existe et est égale à la limite commune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 10 : (Limites et somme). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Solution:

1. D'après un théorème du cours, $\big(w_n\big)_n$ converge aussi.
2. Si $\big(w_n\big)_n$ ne converge pas, alors au moins une entre $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente). Rappel :
   (i) La contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est $(non\ Q) \Longrightarrow (non\ P)$.
   (ii) $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.
3. Il suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 : (Opérations sur les limites). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Solution:

1. Pour tout n, on a :

$$w_n = u_n^2 + 2u_n\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

2. Du point précédent, on déduit que $w_n \geq 0$.
   On a
$$0 \leq \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \leq w_n \qquad (i)$$
   et
$$0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$$
   c'est à dire
$$0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}w_n \qquad (ii)$$
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^2 = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) = 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 : (Suite arithmético-géométrique). On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Solution:

1. $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 3 \Longleftrightarrow \alpha = 6$.

2. On retranche membre à membre les égalités $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ et $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$. On obtient $u_n - \alpha = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha)$.

   Ainsi $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}$.

3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$.

   Par suite $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$. Donc $u_n = v_n + 6 = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$.

   On en déduit $\lim_{n\to\infty} u_n = 6$.

Exercice 13 : (Suites adjacentes). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Solution:

1. On remarque que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Comme $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ alors $\big(u_n\big)_n$ est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n\,(n+1)^2}\Big(n + n\,(n+1) - (n+1)^2\Big) = -\frac{1}{n\,(n+1)^2} < 0\,. \end{aligned}$$

   Donc $\big(v_n\big)_n$ est décroissante.

2. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $\big(u_n\big)_n$ est croissante et $\big(v_n\big)_n$ est décroissante, alors $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

Exercice 14 : (Suites adjacentes - Encore !). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. Étudier la suite $(v_n - u_n)$.
4. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ? De leur limite éventuelle ?

Solution:

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2. Soit n un entier naturel non nul. On calcule $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n\cdot(n+1) + n - (n+1)^2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \end{aligned}$$

   Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $v_n - u_n = 1/(n \cdot n!) > 0$ et par ailleurs, $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
4. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence tend vers 0.

   Donc les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite (qui est égale à $e = \exp(1)$).

Exercice 15 : (Encadrement). Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout k entre 1 et n, on a :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$

4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à 1.

Solution:

1. On a

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{18}} \simeq 0.956, \qquad u_3 = \frac{3}{\sqrt{82}} + \frac{3}{\sqrt{83}} + \frac{3}{\sqrt{84}} \simeq 0.988$$

2. Soit n un entier naturel non nul et k un entier entre 1 et n.

   On a $\sqrt{n^4+1} \leq \sqrt{n^4+k} \leq \sqrt{n^4+n}$

   D'où $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+k}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$, qui est équivalent à

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

3. En sommant ces inégalités pour k entre 1 et n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

   Donc

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$

4. On étudie d'abord les limites des suites $(\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ et $(\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+1}})$.

   On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{-3}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{-4}}}$$

   Donc les suites de terme général $(\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ et $(\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}})$ sont toutes les deux convergentes et de limite égale à 1.

   Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que la suite (u_n) est également convergente et de limite 1.

Exercice 16 : (Des suites de moyennes). Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.

On note ainsi : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 0$. Expliciter les suites (u_n) et $v_n)$ en fonction de n et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Étudier les suites u_n et v_n.
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Montrer que, pour tout n, on a $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Solution:

1. Avec $a = 0$, on a $u_0 = 0$, $v_0 = b$, $u_1 = 0$ et $v_1 = b/2$.
   On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$.
   [Initialisation]. En effet, pour $n = 0$, on a boen $u_0 = 0$ et $v_0 = b \cdot 2^{-0}$.
   [Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons que $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$ et montrons que $u_{n+1} = 0$ et $v_{n+1} = b \cdot 2^{-(n+1)}$.
   En effet : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} = 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{v_n}{2} = b2^{-(n+1)}$.
   [Conclusion]. La propriété est donc vraie au rang 0 et héréditaire, donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$: on a bien, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 0$ et $v_n = b \cdot 2^{-n}$.
   On a dans ce cas : $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$.
2. Si $a = b$, on peut montrer par une récurrence immédiate que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = a$ et $v_n = a$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc des suites constantes et égales. Elles sont alors convergentes et de limite commne a.
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Notons, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. »
   Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
   [Initialisation]. On a $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_1 = \sqrt{ab}$ et $v_1 = (a+b)/2$.
   Puisque $0 \leq a \leq b$, on a bien $a \leq u_0 \leq u_1$ et $v_1 \leq v_0$.
   De plus,
   $$v_1 - u_1 = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2}{2} \geq 0.$$
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   [Hérédité]. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également.
   On a par hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ donc $u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et $v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   De plus,
   $$v_{n+2} - u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} - 2\sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+1}}\right)^2}{2} \geq 0.$$
   On a donc montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée lorsque $\mathcal{P}(n)$ l'est.
   [Conclusion] : $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée et la propriété est héréditaire donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.
   (b) La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $1/2$ donc elle tend vers 0.
   Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, donc convergentes et admettent la même limite.

Exercice 17 : (Moyenne de Cesàro). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Solution:

1. Soit n un entier. On calcule $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{nu_1 + \cdots + nu_n + nu_{n+1} - ((n+1)u_1 + \cdots + (n+1)u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

   Or, la suite (u_n) est croissante donc, pour tout $k \leq n$, on a $u_k \leq u_{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n$ est positif.
   La suite (v_n) est donc croissante.
2. La suite (u_n) est croissante et de limite ℓ donc, pour tout n, $u_n \leq \ell$.
   On en déduit que $v_n \leq \dfrac{n\ell}{n} = \ell$.
   La suite (v_n) est donc croissante et majorée (par ℓ) donc elle est convergente.
3. On a vu que, pour tout n, $v_n \leq \ell$, donc en passant à la limite, on peut conclure que $\ell' \leq \ell$.
4. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \end{aligned}$$

   Or, par croissance de la suite (u_n), on a pour tout $k \geq n$, $u_k \geq u_n$.
   D'où
$$v_{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$
5. Les suites (v_n), (u_n) et (v_{2n}) sont convergentes, donc on peut passer à la limite dans cette inégalité.
   On obtient :
$$\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}.$$
   On en déduite que $\ell' \geq \ell$.
   Or on a montré dans la question 3. que $\ell' \leq \ell$. On peut donc conclure que $\ell' = \ell$: la suite (v_n) est convergente et de même limite que la suite (v_n).

Exercice 18 : (Téléscopages !).

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
   À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution:

1. Soit $k \geq 1$. L'égalité se montre naturellement en partant du membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

2. Soit $k \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

On obtient : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
Cela implique que $\big(u_n\big)_n$ est convergente de limite égale à 1.

Exercice 19 : Classer les suites de termes généraux suivants par ordre de «négligeabilité» :

$$a_n = n^{\frac{1}{3}}, \quad b_n = n^{10}, \quad c_n = (n!)^{\frac{1}{20}}, \quad d_n = \frac{n}{\ln(n)}, \quad e_n = \frac{e^n}{n^5}, \quad f_n = \frac{e^{2n}}{n!}, \quad g_n = 1.$$

Solution: Cf. le polycopié, section « Comparaison de suites » qui donne les résultats de bases sur les comparaisons de suites.
On a $f_n = \underset{n\to+\infty}{o}(g_n)$ puisque $\dfrac{f_n}{g_n} = \dfrac{e^{2n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $g_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ puisque $\dfrac{g_n}{a_n} = \dfrac{1}{n^{1/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(d_n)$ puisque $\dfrac{a_n}{d_n} = \dfrac{\ln(n)}{n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $d_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ puisque $\dfrac{d_n}{b_n} = \dfrac{1}{n^9\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(e_n)$ puisque $\dfrac{b_n}{e_n} = \dfrac{n^{15}}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e_n = \underset{n\to+\infty}{o}(c_n)$ puisque $\dfrac{e_n}{c_n} = \dfrac{e^n}{n^5(n!)^{\frac{1}{20}}} = \left(\dfrac{e^{20n}}{n^{100}n!}\right)^{\frac{1}{20}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exercice 20 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier votre réponse.

1. $1000 = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$
2. $n^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^3)$
3. $n^3 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
4. $(n+1)^2 = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$
5. $2^{n+1} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$
6. $2^{2n} = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$

Solution:

1. C'est vrai. On a bien $|1000| \leq 1000 \cdot |1|$.
2. C'est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|n^2| = n^2 \leq n^3 \leq |n^3|$.
3. C'est faux. On a $\dfrac{n^3}{n^2} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. C'est vrai. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$|(n+1)^2| = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n^2 + n^2 \leq 4n^2 \leq 4|n^2|.$$

5. C'est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|2^{n+1}| = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot |2^n|$.
6. C'est faux. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2^{2n}}{2^n} = \frac{(2^n)^2}{2^n} = 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 21 : Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^4+n^2+1}-n}{(\ln(n))^3-n+6}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n-2}$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Solution:

1. On a $u_n = \dfrac{2n^2}{-n} \cdot \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{4n^4}}-\frac{1}{2n^2}}{1-\frac{(\ln(n))^3}{n}-\frac{6}{n}}$, et donc $\dfrac{u_n}{-\frac{2n^2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui veut dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{2n^2}{n}$.
2. On a $u_n = \dfrac{n-2-(n+2)}{(n+2)(n-2)} = -\dfrac{4}{n^2} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}$, et donc $\dfrac{u_n}{-\frac{4}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui veut dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{4}{n^2}$.
3. On a $u_n = \dfrac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$, et donc $\dfrac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui veut dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
4. On a $u_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin(0)}{\frac{1}{n+1}}$. De plus on remarque que $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et, comme la fonction sin est dérivable en 0, $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin(0)}{\frac{1}{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$. Ainsi $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui veut dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 22 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont-elles vraies ?

1. $(n+1)^3 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3$
2. $3^{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\sim} 3^{n^2}$
3. $3^{n^2+2} = \underset{n\to\infty}{O}\left(3^{n^2}\right)$
4. $3^{n^2-n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(3^{n^2}\right)$
5. $3^n\, n^2 = \underset{n\to\infty}{O}(n!)$
6. $\ln(1+2^n) = \underset{n\to\infty}{O}(n)$

Solution:

1. Vrai, puisque pour $n \geq 1$ on a
$$\frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$
2. Faux. En effet, pour $n \geq 0$ on a
$$\frac{3^{n^2+2}}{3^{n^2}} = 9.$$
3. Vrai, d'après le calcul précédent.
4. Vrai, puisque pour $n \geq 0$ on a
$$\frac{3^{n^2-n}}{3^{n^2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
5. Vrai. On a même $3^n\, n^2 = \underset{n\to\infty}{o}(n!)$. En effet, pour $n \geq 0$ on a
$$\frac{3^n n^2}{n!} = \frac{3^n n^2}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}} = \sqrt{\frac{9^n}{n!}}\sqrt{\frac{n^4}{n!}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Vrai. En effet, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(1+2^n)}{n} = \frac{\ln(2^n(1+2^{-n}))}{n} = \frac{\ln(2^n)+\ln(1+2^{-n})}{n} = \ln 2 + \frac{\ln(1+2^{-n})}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

On a en fait montré que

$$\frac{\ln(1+2^n)}{\ln 2} \underset{n\to\infty}{\sim} n.$$