

Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1 : (Injection, surjection, bijection). Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

Solution:

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$ est surjective, mais pas injective ni bijective.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$ est injective mais pas surjective ni bijective.
4. $f_4 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$ est surjective mais pas injective ni bijective.
5. $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$ est injective, surjective et bijective. .
6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$ n'est ni surjective (l'intervalle $]0, 1[$ n'est pas couvert) ni injective ($f_6(x) = f_6(-x)$) ni bijective.

Exercice 2 : (Trinôme). Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

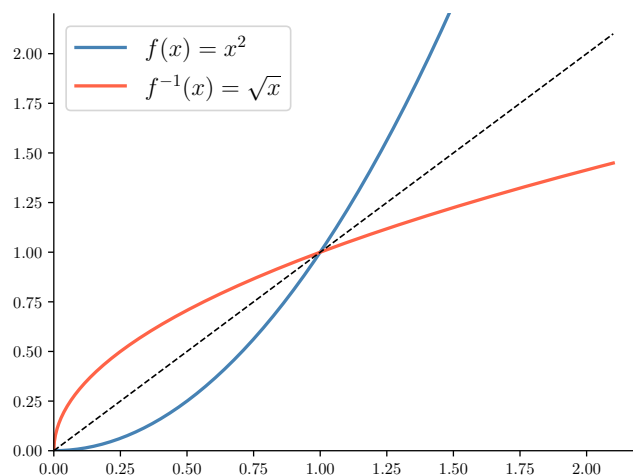
1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a .
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$.

Solution:

1. Si a est strictement positif, alors f est décroissante sur $] -\infty, -b/(2a)]$ et croissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
Si a est strictement négatif, alors f est croissante sur $] -\infty, -b/(2a)]$ et décroissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
2. La courbe représentative de f est une parabole. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$. Algébriquement, cette propriété de symétrie se traduit par : pour tout réel h , on a

$$f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) = f\left(\frac{-b}{2a} - h\right).$$

3. On distingue suivant le signe du discriminant de f , noté Δ :
 - Si Δ est strictement négatif, alors, f ne s'annule pas et, pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a .
 - Si Δ est nul, alors f n'annule en $-b/(2a)$ et est du signe de a sur $\mathbb{R}$ privé de $-b/(2a)$.
 - Si Δ est strictement positif, alors f s'annule en $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par r_1 et r_2 , et du signe opposé sur l'intervalle formé par r_1 et r_2 .
4. Consulter le graphique ci-dessous.



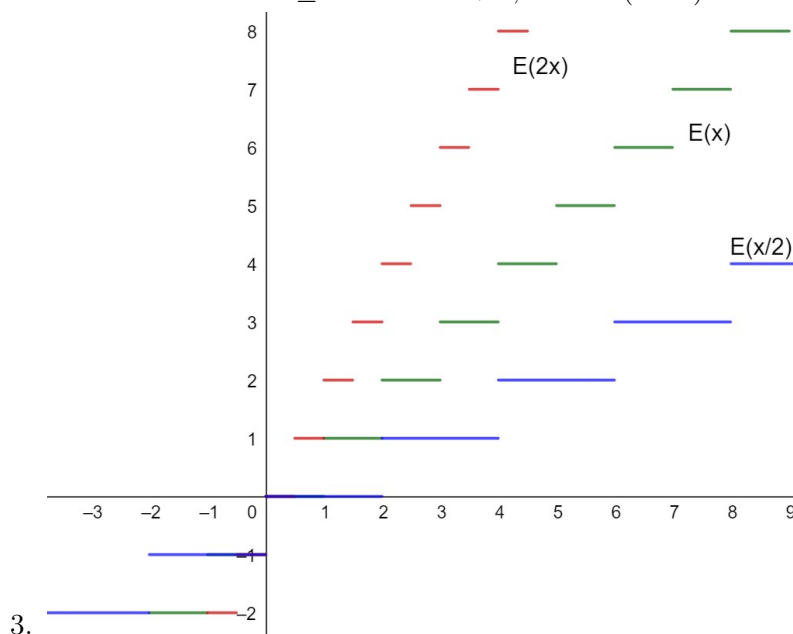
D'après le cours, la courbe de g est la symétrique de f par rapport à la première bissectrice.

Exercice 3 : (Partie entière). On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Solution:

1. Par définition de E , l'image d'un réel par E est un entier relatif, donc $E(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif k , on a $E(k) = k$, donc $\mathbb{Z}$ est inclus dans $E(\mathbb{R})$.
2. 0 est un entier relatif et $0 \leq 0.5 < 0 + 1$, donc $E(0.5) = 0$.
De même, -2 est un entier relatif et $-2 \leq -1.5 < -2 + 1$, donc $E(-1.5) = -2$.



Exercice 4 : (Trigo). Calculer les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution:

1. On a $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. On a $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
3. On a $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{11\pi}{4} + 3\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
4. On a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1,$$

et donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ on en déduit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

5. On a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4},$$

et comme $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ on en déduit

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 5 : (Trigo - encore). Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x + y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x + y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin y$.
2. Montrer que $1 + \sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

$$(a) f_1(x) = \cos^2 x$$

$$(c) f_3(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$$

$$(b) f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$$

$$(d) f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x.$$

Solution:

1. Soient x et y deux réels.

On a $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

On a également $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

2. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 + \sin x. \end{aligned}$$

3. Soit x un réel. On a

$$\begin{array}{ll} \cos(4x) = \cos(2(2x)) & \text{et} \quad \sin(4x) = \sin(2(2x)) \\ = 2\cos^2(2x) - 1 & = 2\sin(2x)\cos(2x) \\ = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 & = 4\sin x \cos x (2\cos^2 x - 1) \\ = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 & = 8\sin x \cos^3 x - 4\sin x \cos x \end{array}$$

4. Soit x un réel n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour lequel $\tan x$ est bien défini.

(a)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x + 1}. \end{aligned}$$

(b) On suppose de plus pour cette question que $|\sin x| \neq |\cos x|$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. On a :

$$f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^4 x - 1}$$

(c) On suppose de plus pour cette question que $\sin x \neq \cos x$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos^3 x (\tan^3 x - 1)}{\cos x (\tan x - 1)} \\ &= \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} (\tan^2 x + \tan x + 1) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \cos^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x (1 - \tan x) \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{aligned}$$

Exercice 6 : (Trigo - toujours!).

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x : $\sin x = \frac{1}{2}$.
3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y , $\sin(y + \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :

$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solution:

1. Soient a et b deux réels. On a

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{et} \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2. Soit x un réel. On a $\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$
3. Soit y et θ deux réels. On a $\sin(y + \theta) = \cos \theta \sin y + \sin \theta \cos y$.
On remarque qu'en choisissant $\theta = \pi/4$, on obtient :

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y.$$

4. Soit y un réel. On remarque que

$$\begin{aligned} \sin y + \cos y &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y \right) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

On a donc $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $\left\{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7: (Composition).

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow K$ et $g : I \rightarrow J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

(a) $x \mapsto (1 + 2x)^2$; (b) $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$; (c) $x \mapsto \exp(x^2 - 1)$.

Solution:

1. Le plus simple est probablement de distinguer quatre cas suivant les sens de variation de f et g . On remarque alors que $f \circ g$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et que $f \circ g$ est décroissante si l'une est croissante et l'autre décroissante.
2. Les décompositions proposées ne sont pas uniques! Chacune des décompositions proposées fait intervenir la fonction carré, qui est bien entendu décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
 - (a) Soit $h_1 : x \mapsto (1 + 2x)^2$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction (affine et croissante) $x \mapsto 1 + 2x$ par la fonction carré $y \mapsto y^2$. La fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que h est croissante sur $[-0.5, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, -0.5]$.
 - (b) Soit $h_2 : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction carré par la fonction $y \mapsto 1/(1 + y)$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction h_2 est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
 - (c) Soit $h_3 : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$.

Exercice 8: (Image directe, image réciproque). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière. Déterminer les ensembles suivants :

- | | | | |
|----------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| 1. $f([0, 3])$. | 4. $f^{-1}([\sqrt{2}, 4])$ | 7. $\sin^{-1}([-0.5, 0.5])$ | 10. $E^{-1}([-1, 1] \cup \{2\})$. |
| 2. $f^{-1}([0, 4])$ | 5. $\sin([0, \pi])$ | 8. $\tan^{-1}([-1, 1])$. | |
| 3. $f^{-1}([-1, 4])$ | 6. $\sin^{-1}(\{0.5\})$ | 9. $E([-1.5, 1.5])$. | |

Solution:

1. $f([0, 3]) = [0, 9]$.
2. $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$
3. $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$
4. $f^{-1}([\sqrt{2}, 4]) = [-2, -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}, 2]$.
5. $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$.
6. On utilise le fait que la fonction $\sin$ est de période 2π et que $\pi/6$ et $5\pi/6$ sont les 2 réels x de $[-\pi, \pi]$ tels que $\sin x = 1/2$. On a donc : $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
7. On utilise la périodicité de la fonction $\sin$ et le fait que $\sin[-\pi/6, \pi/6] = [-1/2, 1/2]$ et $\sin[5\pi/6, 7\pi/6] = [-1/2, 1/2]$. On obtient :

$$\sin^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \bigcup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

8. On utilise la périodicité de la fonction $\tan$, sa monotonie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et le fait que $\tan[-\pi/4, \pi/4] = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\tan^{-1}([-1, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right].$$

9. $E([-1.5, 1.5]) = \{-2, -1, 0, 1\}$.
10. $E^{-1}([-1, 1] \cup \{2\}) = E^{-1}(\{-1, 0, 1, 2\}) = [-1, 3[$.

Exercice 9 : (Réciproque de fonctions circulaires).

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi, 3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.
Exprimer $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [2\pi, 3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi, 2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.
Exprimer $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Solution:

1. La fonction cos est 2π -périodique, donc pour tout réel x , on a $\cos(x - 2\pi) = \cos x$.
La fonction arccos a pour ensemble image l'intervalle $[0, \pi]$, donc pour tout x de $[2\pi, 3\pi]$, on a

$$x = 2\pi + \arccos(\cos(x)) = 2\pi + \arccos(f(x))$$

La fonction réciproque de f est donc la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-1, 1]$ par $\tilde{f}(t) = 2\pi + \arccos(t)$.

2. Soit t un réel de $[-1, 1]$. Notons $u = \arccos(t)$. On sait que u appartient à $[0, \pi]$, que $\cos(u) = \cos(2\pi - u)$, et que $2\pi - u$ appartient à $[\pi, 2\pi]$.
On a donc $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$.
On a donc, pour tout $t \in [-1, 1]$, $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$

Exercice 10 : (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul). Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

Solution:

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
4. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
8. $\tan(\arctan(3)) = 3$.

Exercice 11 : (Dérivée). Déterminer l'ensemble des réels où f_i est dérivable et calculer sa dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{4}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{x}$
3. $f_3 : x \mapsto \sin^2 x$
4. $f_4 : x \mapsto \sin(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \cos^2(3x)$
6. $f_6 : x \mapsto \tan(x^2)$
7. $f_7 : x \mapsto 3x^2 \sin(x^3)$
8. $f_8 : x \mapsto e^{2x+1}$
9. $f_9 : x \mapsto e^{x^2} \cos(3x)$
10. $f_{10} : x \mapsto \frac{1-x}{2+x}$
11. $f_{11} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
12. $f_{12} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
13. $f_{13} : x \mapsto \ln(1+x^4)$
14. $f_{14} : x \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
15. $f_{15} : x \mapsto \ln|\cos x|$

Solution:

1. La fonction $x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f_1 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout réel x , $f_1'(x) = \frac{3}{4}x^2$.

2. Les fonctions $x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_2 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout x strictement positif

$$f_2'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}-1} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. La fonction $\sin$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction carré aussi. La fonction f_3 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on a, pour tout réel x , $f_3'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin(2x)$.
4. Par les mêmes arguments, on justifie que f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a : $f_4'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$.
5. La fonction f_5 est la composée d'une fonction linéaire, de la fonction $\cos$ et de la fonction carré : elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a : $f_5'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot \cos(3x) = -3 \sin(6x)$.
6. La fonction $\tan$ est définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où k est un entier relatif, donc f_6 est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ et sur tout intervalle de la forme $\left]\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right[$, ou $\left]-\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{2}}, -\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right[$ pour k un entier naturel non nul. La dérivée de la fonction $\tan$ étant la fonction $1 + \tan^2$, on a, pour tout x tel que f_6 est bien définie : $f_6'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 + \tan^2(x^2))$.
7. Les fonctions x^2 , x^3 et $\sin$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, comme f_7 est définie par composition et produit de ces fonctions elle est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel on a

$$f_7'(x) = 6x \sin(x^3) + 9x^4 \cos(x^3).$$

8. f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est définie par la composée de la fonction exponentielle et d'une fonction affine, et on a pour tout réel x : $f_8'(x) = 2e^{2x+1}$.
9. f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est définie comme par composition et produit de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout x réel

$$f_9'(x) = 2xe^{x^2} \cos(3x) - 3e^{x^2} \sin(3x).$$

10. f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et pour tout réel x différent de -2 , on a $f_{10}(x) = -1 + \frac{3}{2+x}$ donc

$$f_{10}'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}.$$

11. La fonction f_{11} est définie pour tout x de $[-1, 1]$, et dérivable pour tout x de $] -1, 1[$. Par dérivée d'une fonction composée on a

$$f_{11}'(x) = -2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs supérieures à 1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc par composition f_{12} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout x réel

$$f_{12}'(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

13. La fonction $\ln$ étant définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 + x^4$ étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$, la fonction f_{13} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a :

$$f_{13}'(x) = \frac{4x^3}{1 + x^4}.$$

14. La fonction f_{14} est définie et dérivable pour tout x différent de -1 et 1 . Sa dérivée est un peu plus simple à calculer si on utilise les propriétés de la fonction $\ln$: pour tout réel x différent de 1 et -1 , on a $f_{14}(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$. On sait que la dérivée de $\ln|x|$ est $1/x$ pour $x > 0$ et $-1/(-x) = 1/x$ également pour $x < 0$, donc $(\ln \circ |u|)' = u'/u$. Ainsi $f_{14}'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$.

15. La fonction f_{15} est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos(x)$ est non nul, c'est-à-dire, pour tout x n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$f'_{15}(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Exercice 12 : (Fonctions hyperboliques) Montrer que pour tous réels u et v , on a :

$$\cosh^2 u + \sinh^2 v = \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v) \cosh(u-v)$$

$$\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v) \sinh(u-v)$$

Solution: Soient u et v deux réels. On a

$$\begin{aligned} \cosh^2 u + \sinh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2 + e^{2v} + e^{-2v} - 2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v}) \end{aligned}$$

En échangeant le rôle de u et v dans cette dernière expression, on déduit que $\cosh^2 u + \sinh^2 v = \cosh^2 v + \sinh^2 u$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \cosh(u+v) \cosh(u-v) &= \frac{1}{4}(e^{u+v} + e^{-u-v}) \times (e^{u-v} + e^{v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{u+v+u-v} + e^{u+v+v-u} + e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{2v} + e^{-2v} + e^{-2u}) \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé. De la même façon, et toujours pour deux réels u et v quelconques :

$$\begin{aligned} \cosh^2 u - \cosh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2 - e^{2v} - e^{-2v} - 2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v}) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \sinh(u+v) \sinh(u-v) &= \frac{1}{4}(e^{u+v} - e^{-u-v}) \times (e^{u-v} - e^{v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{u+v+u-v} - e^{u+v+v-u} - e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} - e^{2v} - e^{-2v} + e^{-2u}) \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh(u+v) \sinh(u-v)$. De plus, on utilise la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \cosh^2 u - \cosh^2 v &= 1 + \sinh^2 u - (1 + \sinh^2 v) \\ &= \sinh^2 u - \sinh^2 v. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure à la double égalité.

Exercice 13 : (Équation - Fonctions hyperboliques).

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh x = \cosh(5x).$$

Solution:

1. On a

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} + e^{-(\ln 3)/2}\right) & \text{et} & & \sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} - e^{-(\ln 3)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2} + 3^{-1/2}\right) & & & &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2} - 3^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{3+1}{\sqrt{3}} & & & &= \frac{1}{2} \frac{3-1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} & & & &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. Notons $u = \frac{1}{2}\ln(3)$.

Pour tous réels a et b , on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$, donc, pour tout réel x , on a

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(5x)$.

Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés.

On a donc

$$\begin{aligned} \cosh(x+u) = \cosh(5x) &\iff x+u = 5x \text{ ou } x+u = -5x \\ &\iff 4x = u \text{ ou } -6x = u \\ &\iff x = \frac{u}{4} \text{ ou } x = -\frac{u}{6} \end{aligned}$$

L'ensemble des réels x vérifiant $\frac{2}{\sqrt{3}} \cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh x = \cosh(5x)$ est donc

$$\left\{ \frac{\ln 3}{8}, -\frac{\ln 3}{12} \right\}.$$

Exercice 14: (Limite - exp).

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend vers $+\infty$?

Solution:

1. Soit a un réel.

Si a appartient à $] -1, 1[$, alors (a^n) tend vers 0.

Si $a = 1$, alors (a^n) est la suite constante égale à 1.

Si $a > 1$, alors (a^n) diverge vers $+\infty$.

Si $a \leq -1$, alors (a^n) diverge.

2. La fonction $x \mapsto a^x$ est bien définie lorsque a est positif. Sa limite est la même que la limite de la suite (a^n) .

Exercice 15: (Limites - Opérations). Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x \sin x + x^2}{1 + x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(2x+3)$
6. $f_6 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Solution:

1. Pour tout x , $\frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = \frac{x^5}{x^4} \frac{2 + x^{-3}}{1 + x^{-4}}$ donc $\lim_{+\infty} \frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = +\infty$.
2. Pour tout x , $\frac{x \sin x + x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2}{x^2} \frac{1 + x^{-1} \sin x}{1 + x^{-2}}$ donc $\lim_{\infty} f_2(x) = 1$.
3. Pour tout $x \geq 1$, $f_3(x)$ est bien définie et $\frac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x} = \frac{x^{3/2}}{x^2} \frac{1 + 5x^{-3/2}}{1 + x^{-2} \cos x}$ donc $\lim_{+\infty} f_3(x) = 0$.
4. Pour tout $x \geq 1$, $f_4(x)$ est bien définie. On applique multiplie et on re-divise par l'expression conjuguée (astuce classique pour « faire disparaître » une racine carrée d'une somme) :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{+\infty} f_4(x) = 0$.

5. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln \frac{2x+3}{x}$.

De plus, la limite en $+\infty$ de $x^{-1} \ln(x)$ est nulle, et celle de $\ln \frac{2x+3}{x}$ est égale à $\ln 2$.

Donc $\lim_{+\infty} f_5(x) = 0$.

6. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et lorsque u tend vers 0, $\sin u$ tend vers 0.

Donc, par composition de limites, $\lim_{+\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$

7. Pour tout $x > 0$, $f_7(x) = x \times \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)$.

La fonction $\cos$ étant bornée, le théorème des gendarmes permet de justifier que $\lim_{+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Donc $\lim_{+\infty} f_7(x) = +\infty$.

NB : on peut tout aussi bien minorer $f_7(x)$ par $x - 1$, et utiliser une comparaison de limites.

8. On commence par expliciter f_8 à l'aide de la fonction exponentielle : pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned}
 f_8(x) &= e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \\
 &= \frac{1}{8} e^{-x} (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x} - (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})) \\
 &= \frac{1}{8} e^{-x} (6e^x + 2e^{-3x}) \\
 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-4x}
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_8(x) = \frac{3}{4}$.

9. Pour tout réel x , $\cosh x$ est strictement positif, donc $f_9(x)$ est bien défini.

Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned}
 f_9(x) &= x - \ln(\cosh x) \\
 &= x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= x - \ln \left(\frac{e^x (1 + e^{-2x})}{2} \right) \\
 &= x - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 \\
 &= -\ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_9(x) = \ln 2$.

Exercice 16 : (Fonction réciproque - Dérivée).

1. Montrer que pour tout y réel il existe un unique x réel tel que $y = \sinh(x)$, et exprimer x en fonction de y . $\sinh$ est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note sa bijection réciproque $\operatorname{argsinh}$.
2. Calculer la dérivée de $\operatorname{argsinh}$.

Solution:

1. Soit y un réel. Déterminons x tel que $\sinh(x) = y$.

On a

$$\begin{aligned}
 y = \sinh(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
 &\iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\
 &\iff (e^x)^2 - 2y \times e^x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de degré 2 en la variable $X = e^x$: il nous faut donc déterminer les racines positives de cette équation.

Déterminons les racines de $X^2 - 2yX - 1 = 0$: il s'agit d'un trinôme en X , dont le discriminant Δ est égal à $\Delta = 4y^2 + 4$ qui est toujours strictement positif.

Les racines de ce trinôme sont donc

$$r_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Pour toute valeur de y on remarque que r_1 est négative et r_2 est positive.

En posant $x = \ln X$, on obtient l'antécédent de y par $\sinh$:

$$\operatorname{argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

2. La fonction $\operatorname{argsinh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout y réel on a :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{argsinh}'(y) &= \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1 + y^2}} \right) \times \frac{1}{y + \sqrt{1 + y^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + y^2} + y}{\left(\sqrt{1 + y^2} \times (y + \sqrt{1 + y^2}) \right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.
 \end{aligned}$$