

Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 : (Automatismes - Inégalités). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $7x + 9 > 0$

3. $10x - 1 \leq 5$

5. $11x + 9 \leq -4$

2. $-3x \geq 2$

4. $-7x - 2 > 0$

6. $-3x - 2 \geq 7$

Solution:

1. $7x + 9 > 0$ ssi $x > -9/7$

4. $-7x - 2 > 0$ ssi $x < -\frac{2}{7}$

2. $-3x \geq 2$ ssi $x \leq -\frac{2}{3}$

5. $11x + 9 \leq -4$ ssi $x \leq -\frac{13}{11}$

3. $10x - 1 \leq 5$ ssi $x \leq \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$

6. $-3x - 2 \geq 7$ ssi $x \leq -3$

Exercice 2 : (Inégalités). Vrai ? Faux ? Justifier !

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.

2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.

3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Solution:

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.

C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Si on choisit $x = 0$ et $y = 7$ alors on a $x + y \leq 7$ et $y > 4$. **On ne fait pas de différences d'inégalités.**

2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.

C'est FAUX : on exhibe un contre-exemple. Avec $x = -2$ et $y = 3$ on a $xy = -6 < -4$. **On ne multiplie des inégalités que si tous les termes sont positifs.**

3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

C'est VRAI. On peut aller plus vite que ce qui est proposé dans la correction ci-dessous, mais mieux vaut entraîner les étudiants à être rigoureux !

On raisonne par disjonction de cas, suivant les signes de x et y :

1er cas : Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [0, 1]$: alors

$$0 \leq x \leq 7$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Donc $0 \leq xy \leq 7$. On a bien $-28 \leq xy \leq 8$.

2ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [0, 1]$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Donc $0 \leq -xy \leq 2$, ou encore $-2 \leq xy \leq 0$.

On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.

3ème cas Soient $x \in [0, 7]$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < x \leq 7$$

$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq -xy \leq 28$ et $0 \geq xy \geq -28$.

On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.

4ème cas Soient $x \in [-2, 0[$ et $y \in [-4, 0[$. Alors

$$0 < -x \leq 2$$

$$0 < -y \leq 4$$

Donc $0 \leq xy \leq 8$.

On a bien à nouveau $-28 \leq xy \leq 8$.

L'ensemble des cas étudiés regroupent l'ensemble des cas possibles, donc on peut conclure que pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 3 : (Signe du trinôme). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$

2. $x^2 - 2x + 1 > 0$

4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$

6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$

Solution :

1. On reconnaît une inégalité remarquable dans le membre de gauche : pour tout réel x , on a $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Le carré d'un nombre réel étant toujours un réel positif ou non, on en déduit que, pour tout réel x , $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathbb{R}$.

2. On reconnaît la même identité remarquable que dans la question précédent : on conclut alors facilement qu'un réel x vérifie $x^2 - 2x + 1 > 0$ si et seulement si $x - 1$ est non nul. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, qui peut s'écrire également $] - \infty, 1[\cup] 1, +\infty[$.

3. On cherche à factoriser $x^2 + 2x - 3$, et pour cela, on détermine les racines du trinôme. On peut bien sûr calculer le discriminant, mais c'est plus rapide de remarquer que 1 est racine, et que le produit des racines est égal à -3. Les racines de ce trinôme sont donc 1 et -3.

On a donc, pour tout réel x , $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Il reste à faire le tableau de signes pour en déduire que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ si et seulement si x appartient à $[-3, 1]$.

4. On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 25 + 4 \times 14 = 81$, donc ses racines sont

$$x_1 = \frac{-5 - 9}{-2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + 9}{-2} = -2$$

On a donc, pour tout réel x :

$$-x^2 + 5x + 14 = -(x - 7)(x + 2).$$

On dresse le tableau de signes pour conclure : $-x^2 + 5x + 14 > 0$ ssi $x \in] - 2, 7[$.

A retenir : un trinôme est du signe opposé à celui de son coefficient de degré 2 entre les racines.

5. On reconnaît une identité remarquable : Pour tout réel x , on a $-x^2 - 10x - 25 = -(x + 5)^2$, donc $-x^2 - 10x - 25$ est toujours positif. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 - 10x - 25 > 0$ est l'ensemble vide.

6. On reconnaît une identité remarquable : pour tout réel x , on a $-x^2 + 14x - 49 = -(x - 7)^2$.

On en déduit que $-x^2 + 14x - 49 < 0$ si et seulement si x est différent de 7.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{7\} =] - \infty, 7[\cup] 7, +\infty[$.

Exercice 4 : 1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.

- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
- Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Solution:

- Un calcul simple permet de trouver $4x \leq 7$, d'où $x \leq 7/4$.
- Il suffit de chercher les racines du polynôme $x^2 - 4x - 2$, qui sont $2 \pm \sqrt{6}$. L'inégalité est alors vérifiée pour tous les nombres réels x tels que $x \leq 2 - \sqrt{6}$ ou $x \geq 2 + \sqrt{6}$.
- On développe le carré et on amène x à gauche : on trouve $x^2 + 5x + 4 < 0$. On remarque que $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$, et alors $-4 < x < -1$.
- L'inégalité à résoudre est équivalente à $x^3 - x^2 + 6x \geq 0$. On peut factoriser le membre de gauche de la façon suivante : $x^3 - x^2 + 6x = x(x^2 - x + 6) = x(x - 3)(x + 2)$. Un tableau de signes permet de trouver la solution $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$.

- Exercice 5 :**
- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{6x + 5} > 1$.
 - Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x - 2} < \frac{2}{3x + 2}$.

Solution:

- On amène le terme de gauche à droite : l'inégalité est donc équivalente à résoudre

$$1 + \frac{2}{6x + 5} < 0.$$

On calcule le dénominateur en commun, et on trouve

$$\frac{6x + 7}{6x + 5} < 0.$$

En dressant un tableau de signes, on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x \in] -7/6, -5/6[$.

- L'argument est tout à fait analogue au précédent : on amène le terme de gauche à droite et on calcule le dénominateur en commun. Après avoir multiplié par -1 pour se retrouver avec un coefficient de x positif au numérateur, on se retrouve à résoudre l'inégalité équivalente

$$\frac{x + 6}{(3x + 2)(x - 2)} < 0.$$

On résout cette inégalité en dressant un tableau de signe, et on trouve l'ensemble des solutions $S =] -\infty, -6[\cup] -2/3, 2[$.

- Exercice 6 :** Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.

Solution: On sépare l'étude dans les deux cas suivants.

- (i) Si $2 - x \geq 0$, alors l'inégalité devient

$$2 - x \leq 3 - x \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq 3,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais x doit vérifier $x \leq 2$, donc l'ensemble des solutions de la première inégalité est $] -\infty, 2]$.

- (ii) si $2 - x < 0$, alors on trouve

$$-2 + x \leq 3 - x \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \leq 5,$$

ce qui est vrai pour $x \leq 5/2$. Mais x devait être plus grande que 2, donc la deuxième inégalité est vérifiée pour tout $x \in [2, 5/2]$.

En conclusion, l'inégalité est satisfaite pour tout $x \in] -\infty, 5/2]$.

Exercice 7 : (Inéquations et équations).

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ qui vérifient $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Solution:

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.

On considère le trinôme $y^2 - 13y + 36$. Son discriminant est $\Delta = 169 - 144 = 25$, donc ses racines sont $\frac{13-5}{2} = 4$ et $\frac{13+5}{2} = 9$.

On a donc, pour tout réel y , $y^2 - 13y + 36 = (y-4)(y-9)$.

On peut ensuite réaliser un tableau de signes pour en déduire que $y^2 - 13y + 36 \leq 0$ pour tout y de $[4, 9]$.

Revenons à l'inéquation initiale : Pour tout réel x , on a $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2)^2 - 13(x^2) + 36$. Donc $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$ ssi x^2 appartient à $[4, 9]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$ est donc $[-3, -2] \cup [2, 3]$.

2. Le plus simple est de commencer par mettre les deux fractions dans le même membre de l'inégalité et de calculer leur somme. Il restera alors à réaliser un tableau de signes.

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

On a $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$ ssi $\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} > 0$.

Or

$$\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = \frac{(x-3)(x+6) + (x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2 + 3x - 18 + x^2 - 5x - 6}{(x+1)(x-3)} = \frac{2(x^2 - x - 12)}{(x+1)(x-3)}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x - 12$ est égal à 49 et ses racines sont $\frac{1-7}{2} = -3$ et $\frac{1+7}{2} = 4$.

On a donc $\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = 2 \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}$.

Il reste alors à réaliser le tableau de signes et on obtient que $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$ ssi $x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 3[\cup]4, +\infty[$.

3. On étudie $|x-3| + |x-7|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 3]$, $[3, 7]$ et $[7, +\infty[$.

— Pour tout x dans $]-\infty, 3]$, on a $|x-3| + |x-7| = -2x + 10$

Donc $|x-3| + |x-7| = 4$ ssi $-2x + 10 = 4$, ie $x = 3$.

— Pour tout x dans $[3, 7]$, on a : $|x-3| + |x-7| = 4$, donc tout réel de $[3, 7]$ est solution.

— Pour tout x dans $[7, +\infty[$, on a : $|x-3| + |x-7| = 2x - 10$ et $2x - 10 = 4$ ssi $x = 7$.

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $|x-3| + |x-7| = 4$ est l'intervalle $[3, 7]$.

4. On étudie $|x-1| + |x-2|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$.

— Pour tout x dans $]-\infty, 1]$, on a $|x-1| + |x-2| = -2x + 3$.

Or $-2x + 3 < 1$ ssi $x > 1$. Mais on ne cherche que les solutions dans $]-\infty, 1]$, donc c'est impossible.

— Pour tout x dans $[1, 2]$, on a : $|x-1| + |x-2| = 1$, donc aucun réel de $[1, 2]$ n'est solution.

— Pour tout x dans $[2, +\infty[$, on a : $|x-1| + |x-2| = 2x - 3$ et $2x - 3 < 1$ ssi $x < 1$.

Aucun réel de $[2, +\infty[$ n'est donc solution de $|x-1| + |x-2| < 1$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de $|x-1| + |x-2| < 1$ est l'ensemble vide.

Remarque : on peut aussi tracer la fonction $x \mapsto |x-1| + |x-2|$.

Exercice 8 : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Solution: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule

$$0 \leq (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

De la même manière, on a aussi

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Donc, en mettant ensemble ces deux inégalités, on trouve

$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$$

ce qui est équivalent à dire que $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

Exercice 9 : Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Solution: On commence par remarquer que

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

En utilisant le fait que $|ab| = |a||b|$, on peut amener le terme de droite à gauche du signe d'inégalité et on peut mettre en facteur $|1 - x|$: cela donne

$$|1 - x| (|1 + x| |1 + x^2| - 4) \leq 0.$$

Maintenant, $|1 - x| \geq 0$ pour tout x , donc cela suffit de résoudre

$$|1 + x| |1 + x^2| - 4 \leq 0.$$

On note que, pour $x \in [-1, 1]$, les deux arguments de la valeur absolue sont positifs : en développant les produits, on trouve donc

$$x^3 + x^2 + x - 3 \leq 0.$$

Étant donné que $x \in [-1, 1]$, par inégalité triangulaire on a que

$$x^3 + x^2 + x \leq |x^3 + x^2 + x| \leq |x|^3 + |x|^2 + |x| \leq 3,$$

qui dit que l'inégalité de départ est toujours vérifiée pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 10 : Pour x réel, on note $f(x) = |2 - |1 - x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f .

Solution: Premier cas : $1 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Dans ce cas, $f(x) = |2 - (1 - x)| = |1 + x|$. Si en plus $1 + x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$, alors $f(x) = 1 + x$.

Si, au contraire, $x < -1$, on trouve $f(x) = -x - 1$.

Deuxième cas : si $1 - x < 0$, c'est-à-dire $x > 1$, alors $f(x) = |2 + (1 - x)| = |3 - x|$. Si maintenant $x \leq 3$, alors $f(x) = 3 - x$; si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Conclusion : Pour $x < -1$, on a $f(x) = -x - 1$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, on a $f(x) = 1 + x$. Pour $1 < x \leq 3$, on a $f(x) = 3 - x$. Enfin, si $x > 3$, on a $f(x) = x - 3$.

Exercice 11 : Expliciter trois réels a , b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x + 1|$.

Solution: En développant les produits à droite, on trouve l'égalité

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c.$$

On en déduit que

$$a = 1, \quad a + b = -1, \quad b + c = 2, \quad c = 4,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $c = 4$ et $b = -2$.

Pour ces valeurs de (a, b, c) , on a une factorisation de $x^3 - x^2 + 2x + 4$:

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(x^2 - 2x + 4).$$

On remarque que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (soit on calcule les racines réelles par la formule, soit on reconnaît que ce terme est de la forme $a^2 + ab + b^2$). L'inégalité à résoudre devient alors

$$(x+1)(x^2 - 2x + 4) > |x+1|.$$

Vu que le terme de droite est positif et que $x^2 - 2x + 4 \geq 0$, on doit avoir forcément $x+1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. En utilisant cette remarque, on va résoudre alors

$$(x+1)(x^2 - 2x + 4) > x+1 \quad \implies \quad (x+1)(x^2 - 2x + 3) > 0.$$

Encore une fois, $x+1 > 0$; en plus, et donc il faut résoudre $x^2 - 2x + 3 > 0$. Le polynôme $x^2 - 2x + 3$ a seulement des racines complexes, autrement dit la dernière inégalité est toujours vraie. L'ensemble des solutions est donc $] -1, +\infty[$.

- Exercice 12:** 1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Solution:

1. On calcule $A - B$:

$$A - B = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3} - \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4} = \frac{4a^4 - 28a^2 + 16 - (3a^4 - 27a^2 + 15)}{12} = \frac{a^4 - a^2 + 1}{12}.$$

En posant $y = a^2$, on est ramené à étudier le signe du trinôme $y^2 - y + 1$, qui est toujours positif. $a \in \mathbb{R}$, on a $A > B$.

2. On calcule

$$D - C = \frac{1}{12} (-a^4 + (3n - 4m)a^2 + 1).$$

Maintenant, pour $a = 0$, $D - C = 1/12 > 0$. Pour $a \rightarrow +\infty$, par contre, $D - C \rightarrow -\infty$, donc le signe de $D - C$ n'est pas constant.

Exercice 13: (Moyennes). Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Solution:

1. Montrons que $m \leq y$: Comme $x \leq y$, $x + y \leq y + y$ donc $\frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y$.
2. Montrons que $g \leq m$: $g \leq m \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow xy \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$, qui est toujours vrai quelles que soient les valeurs de x et y . Donc $g \leq m$.
3. Montrons que $x \leq h$: On remarque que comme $y \geq x > 0$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ et donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{h}$. Ainsi $x \leq h$ (en utilisant à nouveau le fait que la fonction $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$).
4. Montrer que $h \leq g$: $h \leq g \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{4}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}} \leq xy \Leftrightarrow xy \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{y^2 + x^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, qui est vrai pour tout x et y positifs.

Exercice 14 : (Simplification d'intervalles) Simplifier les intervalles suivants.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $[1, 5] \cap [2, 6[$; | 4. $] - \infty, 3] \cup [0, +\infty[$; | 7. $[1, 2] \cap [5, 6[$; |
| 2. $[1, 5] \cup [2, 6[$; | 5. $[-2, 3] \cup \{3\}$; | 8. $[1, 2] \cup [5, 6[$; |
| 3. $] - \infty, 3] \cap [0, +\infty[$; | 6. $[-2, 3] \cap \{3\}$; | 9. $([-6, 8] \cup [4, 6]) \cap [7, 10[$; |

Solution:

- | | |
|--|--|
| 1. $[1, 5] \cap [2, 6[= [2, 5]$; | 7. $[1, 2] \cap [5, 6[= \emptyset$; |
| 2. $[1, 5] \cup [2, 6[= [1, 6[$; | 8. $[1, 2] \cup [5, 6[= \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } 5 \leq x < 6\}$. Ce n'est pas un intervalle !; |
| 3. $] - \infty, 3] \cap [0, +\infty[= [0, 3]$; | 9. $([-6, 8] \cup [4, 6]) \cap [7, 10[= [-6, 8] \cap [7, 10[= [7, 8]$; |
| 4. $] - \infty, 3] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$; | |
| 5. $[-2, 3] \cup \{3\} = [-2, 3]$; | |
| 6. $[-2, 3] \cap \{3\} = \{3\}$; | |

Exercice 15 : (Intervalles). Soient $a \leq b$ et $c \leq d$ des réels. On note $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$.

1. Montrer que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I \cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B$ soit un intervalle, sans que ni A , ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A \cup B$.

Solution: Il est vivement conseillé de faire des schémas représentant les intervalles !

1. Soit x un réel. On a $x \in I \cap J$ si et seulement si x vérifie les quatre conditions $a \leq x$, $x \leq b$, $c \leq x$ et $x \leq d$.
Ce qui équivaut à $x \geq \max(a, c)$ et $x \leq \min(b, d)$.
On aboutit à deux cas :
 - Si $\max(a, c) > \min(b, d)$, ce qui est le cas si $b < c$ ou si $d < a$, alors $I \cap J$ est l'ensemble vide donc c'est un intervalle $]a, a[$.
 - Sinon, on a $I \cap J = [\max(a, c), \min(b, d)]$, qui est bien un intervalle.
 On peut conclure que $I \cap J$ est toujours un intervalle (éventuellement vide).
2. $I \cup J$ est un intervalle si et seulement si $I \cap J$ est non vide.
En effet, supposons par exemple $a \leq c$.
On peut distinguer trois cas suivant les positions respectives de b , c et d .

- Si $b < c \leq d$: alors tout réel x de $]b, c[$ n'appartient pas à $I \cup J$. On constate donc que $I \cup J$ n'est pas un intervalle et que $I \cap J$ est vide.
 - Si $c \leq b \leq d$: alors tout réel de l'intervalle $[a, d]$ est soit compris entre a et b , soit compris entre c et d . On a donc $I \cup J = [a, d]$ et $I \cap J$ est effectivement non vide.
 - Si $a \leq c \leq d < b$: alors $I \cup J = [a, b]$ et $I \cap J = [c, d]$ est non vide.
3. Par exemple, on choisit $A = [0, 1] \cup \{10\}$ et $B = [0, 1] \cup \{12\}$. Alors A et B ne sont pas des intervalles et $A \cap B = [0, 1]$ est un intervalle.
- Avec $C = [0, 1/2] \cup [3/4, 1]$ et $D = [0, 1/4] \cup [1/2, 3/4]$, on a un exemple de deux parties qui ne sont pas des intervalles et dont la réunion forme un intervalle.

Exercice 16 : (Majorant).

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0, 1]$? De $[0, 1[$?
3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Le majorant de $A \cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A \cap B$?

Solution:

1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout x dans A , on ait $x \leq M$.
2. Les majorants de $[0, 1]$ sont tous les réels supérieurs ou égaux à 1, donc tous les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$.
Les majorants de $[0, 1[$ sont également tous les réels de $[1, +\infty[$.
3. $\mathbb{R}^+$ est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On peut penser par exemple aussi à $\mathbb{N}$, ou à $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
4. C'est vrai : soit M un majorant de $A \cup B$.
Pour tout $x \in A$, on a $x \in A \cup B$, donc $x \leq M$: le réel M est donc bien un majorant de A .
On peut montrer de même qu'il est un majorant de B .
On ne peut rien dire sur les majorants de A ou B à partir d'un majorant de $A \cap B$. On peut simplement montrer que si $A \cap B$ n'est pas majoré, alors ni A , ni B ne sont majorés.

Exercice 17 : (Maximum).

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A \cap B$ et $A \cup B$ admettent des maximums ?

Solution:

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est le maximum de A si M appartient à A et si M est un majorant de A .
2. Le maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$, s'il existe, est unique.
Considérons deux maximums M_1 et M_2 de A .
Alors, par définition du maximum : M_2 étant le maximum de A , on a M_2 appartient à A , et donc M_1 , qui est un maximum de A , lui est supérieur : $M_1 \geq M_2$.
De même, $M_2 \geq M_1$.
On peut alors conclure que $M_1 = M_2$: le maximum, s'il existe, est unique.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, que l'on note M . Alors, par définition du maximum, pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$, donc M est un majorant de A .
Toute partie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum est donc majorée.

4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

A n'admet pas de maximum si, pour tout $x \in A$, il existe un réel y de A tel que $y > x$.

5. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum que l'on note M_A (resp. M_B).

On considère $K = \max(M_A, M_B)$. Alors, K appartient à $A \cup B$, et tout élément de A (resp. de B) est inférieur ou égal à K . Donc K est un majorant de $A \cup B$.

On peut donc conclure que K est le maximum de $A \cup B$.

En ce qui concerne $A \cap B$: le même réel K est un majorant de $A \cap B$, mais il n'a aucune raison d'être son maximum.

On peut trouver des contre-exemples pour lesquels A et B admettent un maximum et $A \cap B$ n'en admet pas. Il suffit par exemple de choisir deux intervalles fermés bornés et disjoints. L'ensemble vide n'admet pas de maximum.

Ou alors : $A = [0, 1[\cup \{2\}$ et $B = [0, 1[\cup \{3\}$. Alors : 2 est le maximum de A , et 3 est celui de B mais $A \cap B = [0, 1[$ n'admet pas de maximum.

Exercice 18 : (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum). Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$; | 4. $D =]0, +\infty[$; | 7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 2\right\}$; |
| 2. $B = [-1, 3]$; | 5. $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 4\}$; | 8. $H = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. |
| 3. $C = [0, +\infty[$; | 6. $F = \{n \in \mathbb{N}, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$; | |

Solution :

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$ est majoré et minoré, admet un maximum (21), un minimum (-9) (donc une borne sup et une borne inf).
2. $B = [-1, 3]$ est majoré, minoré, admet un maximum (3) et un minimum (-1), (donc une borne sup et une borne inf) ;
3. $C = [0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf qui est aussi son minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup. ;
4. $D =]0, +\infty[$ est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum. N'est pas majoré, n'admet pas de maximum, ni de borne sup.
5. $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 4\}$ est l'intervalle $]2, 2[$: il est majoré, minoré, admet une borne sup (2) et une borne inf (-2), mais pas de maximum, ni de minimum.
6. $F = \{n \in \mathbb{N}, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$ est l'ensemble $\{2, \dots, 10\}$. Il est minoré et majoré, admet une borne inf et un minimum (2), une borne sup et un maximum (10).
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 2\right\}$ est l'ensemble $]0, 1/2[$. Il est minoré, a une borne inférieure (0) mais pas de minimum. Il est majoré, admet une borne sup (1/2) mais pas de maximum.
8. $H = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet un pour maximum (donc borne sup aussi) et est majoré. Il est minoré, admet une borne inf (0) mais pas de minimum.