Vrai ou Faux ? A propos du CM du 17/10

Algèbre 1
24/10/2025

Vrai/Faux 1

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

Vrai/Faux 1

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

FAUX. C'est $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ qui est toujours vrai !
Si $y \in f(A) \cap f(B)$, alors :

- $y \in f(A)$ donc $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$;
- $y \in f(B)$ donc $\exists x' \in B$ tel que $y = f(x')$.

Il n'y a pas de raison que $x, x' \in A \cap B$...

... sauf **si f est injective**, car dans ce cas
$f(x) = f(x') \implies x = x' \in A \cap B$ et donc $y \in f(A \cap B)$.

Vrai/Faux 2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définies par

$$\forall x > 0, f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, g(x) = \sqrt{x}.$$

Alors la composée $g \circ f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Vrai/Faux 2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définies par

$$\forall x > 0, f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, g(x) = \sqrt{x}.$$

Alors la composée $g \circ f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.

FAUX. On doit vérifier que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui est faux car $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ (le logarithme prend des valeurs négatives).

Pour que ce soit possible, **il faut restreindre f sur $[1, +\infty[$** (là où le logarithme est positif) pour que $f([1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$. Alors $g \circ f$ est définie et on a

$$\forall x \geq 1, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln(x)}.$$

Vrai/Faux 3

L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ est une bijection.

Vrai/Faux 3

L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ est une bijection.

VRAI. Pour tout $w, z \in \mathbb{C}$, on a

$$w = f(z) \iff w = \overline{z} \iff \overline{w} = \overline{\overline{z}} = z.$$

Ainsi, w admet un unique antécédent $\overline{w} \in \mathbb{C}$, donc f est bijective de bijection réciproque f. On a bien

$$f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$