Vrai ou Faux ? A propos du CM du 12/09

Algèbre 1
19/09/2025

Vrai/Faux 1

Le calcul suivant est juste : pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}(-2k+3) &= -2\sum_{k=3}^{n}k + 3\sum_{k=3}^{n}1 \\ &= -2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 3(n-3) = -n^2 + 2n - 9.\end{aligned}$$

Vrai/Faux 1

Le calcul suivant est juste : pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}(-2k+3) &= -2\sum_{k=3}^{n} k + 3\sum_{k=3}^{n} 1\\ &= -2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 3(n-3) = -n^2 + 2n - 9.\end{aligned}$$

FAUX. On remarque que :

- on a en fait $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = \frac{(n+3)(n-3+1)}{2} = \frac{(n+3)(n-2)}{2}$ (cf. cours)
- on a en fait $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 1 = n-3+1 = n-2$.

Au final, on trouve (à vous de refaire les calculs plus tard)

$$\sum_{k=3}^{n}(-2k+3) = -n(n-2).$$

Vrai/Faux 2

On a, pour tout entier $n \geq 5$ entier

$$\sum_{k=5}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{5}$$

.

Vrai/Faux 2

On a, pour tout entier $n \geq 5$ entier

$$\sum_{k=5}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{5}$$

.

VRAI. C'est simplement la proposition sur les sommes téléscopiques avec, pour tout entier $k \geq 5$,

$$a_k = \frac{1}{k},$$

et ainsi

$$\sum_{k=5}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_5 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{5}.$$

Vrai/Faux 3

On a, pour tout entier n et tout réel x,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}.$$

Vrai/Faux 3

On a, pour tout entier n et tout réel x,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}.$$

VRAI. On applique simplement la formule, vraie pour tous réels a, b et tout entier $n \geq 1$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ à $a = x$ et $b = 1$:

$$x^n - 1 = x^n - 1^n = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} 1^k = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}.$$

Remarque : On retrouve la formule de la série géométrique : pour tout réel $x \neq 1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^0 - x^n}{1 - x}$$

BONUS : Énigme à résoudre

Ecrire la somme suivante sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k$ pour un certain entier n et une certaine famille $(a_k)_k$, puis la calculer :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots + \frac{1}{399}$$

Indice : *attendre d'avoir traité la feuille de TD 2...*