Vrai ou Faux ? A propos du CM du 10/10

Algèbre 1
17/10/2025

Vrai/Faux 1

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$((A \cap B)^c \cup A)^c = \emptyset.$$

Vrai/Faux 1

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$((A \cap B)^c \cup A)^c = \emptyset.$$

VRAI. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
((A \cap B)^c \cup A)^c &= (A \cap B) \cap A^c \quad ((C \cup D)^c = C^c \cap D^c \quad \text{et} \quad (D^c)^c = D) \\
&= A \cap A^c \cap B \quad (\text{par commutativité}) \\
&= \emptyset \quad (\text{car} \quad A \cap A^c = \emptyset)
\end{aligned}$$

Vrai/Faux 2

L'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+$, $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est bijective.

Vrai/Faux 2

L'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+,\ n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est bijective.

FAUX. En effet :

1. l'application f est injective. Soient $(n, n') \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors on a
$$f(n) = f(n') \Longrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{n'} \Longrightarrow n = n'.$$
2. l'application f n'est pas surjective. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+$. Alors l'équation $\sqrt{2} = \dfrac{1}{n}$ n'admet pas de solution, comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Comme f n'est pas surjective, f n'est pas bijective.

Vrai/Faux 3

La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n, n+1]$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 3

La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n, n+1]$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

FAUX. Ces ensembles ne sont pas d'intersection vide puisque

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A_n \cap A_{n+1} = [n, n+1] \cap [n+1, n+2] = \{n+1\} \neq \emptyset.$$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$, $x \in [n, n+1]$, en choisissant $n = E(x)$, alors $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.

Par contre, la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $B_n = [n, n+1[$ forme bien une partition de $\mathbb{R}$.