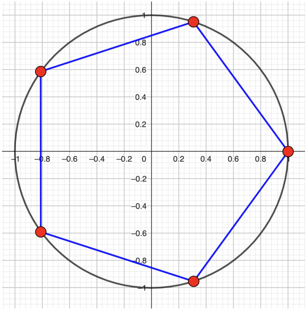
Vrai ou Faux ? A propos du CM du 07/11

Algèbre 1

14/11/2025

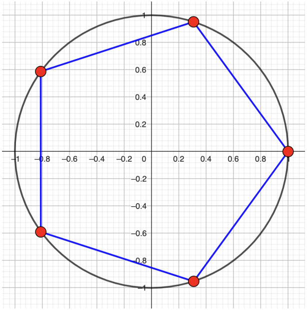
Vrai/Faux 1

Les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$ sont celles placées dans le plan complexe ci-dessous.



Vrai/Faux 1

Les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$ sont celles placées dans le plan complexe ci-dessous.



FAUX. L'équation $z^4 = 1$ admet **4 solutions** complexes $\{1, i, -1, -i\}$.
Les points placés ci-dessus sont les racines 5-ièmes de 1, solutions de l'équation $z^5 = 1$.

Vrai/Faux 2

Les racines carrées de i sont $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vrai/Faux 2

Les racines carrées de i sont $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

VRAI. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors ses racines carrées sont

$$z_0 = \sqrt{1} \times e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\times 0\times\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$z_1 = \sqrt{1} \times e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\times 1\times\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On pouvait aussi calculer $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$.

Vrai/Faux 3

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$, alors l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Vrai/Faux 3

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$, alors l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

FAUX. Cette équation admet 3 racines non-nécessairement distinctes.

Vrai/Faux 3

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, $a \neq 0$, alors l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

FAUX. Cette équation admet 3 racines non-nécessairement distinctes.Par exemple, l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0 \quad (a = 1, b = -3, c = 3, d = -1)$$

peut se réécrire $(z-1)^3 = 0$ d'après la formule du binôme de Newton, et donc on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0 \iff (z-1)^3 = 0 \iff z = 1,$$

qui correspond donc aux trois racines valant toutes 1 (racine triple).

Au passage... il y a la Théorie de Galois

Il a été démontré par Galois (1811-1832) que toute équation de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 5$, n'admet pas de solution **générale** s'exprimant avec des racines k-ièmes, comme c'est le cas pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemples, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$:

1. $az + b = 0 \iff z = -\dfrac{b}{a}$,
2. $az^2 + bz + c = 0 \iff z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.
3. pour les degrés 3 et 4, les formules sont compliquées...!