Vrai ou Faux ? A propos du CM du 03/10

Algèbre 1
10/10/2025

Vrai/Faux 1

On a $\mathcal{P}(\{1\}) = 1$.

Vrai/Faux 1

On a $\mathcal{P}(\{1\}) = 1$.

FAUX. Il y a deux erreurs :

1. Il manque l'ensemble vide qui est toujours inclus dans un ensemble.
2. 1 est un réel, pas un ensemble, et doit donc être remplacé par $\{1\}$.

Au final,

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

L'ensemble $\{1\}$ n'ayant qu'un seul élément, on doit avoir

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\{1\})) = 2^1 = 2.$$

Vrai/Faux 2

Soit A l'ensemble des étudiant.es présent.es aujourd'hui en amphi, alors

$$(2\mathbb{Z} + 4) \cap (2\mathbb{Z} + 1) \subset A.$$

Vrai/Faux 2

Soit A l'ensemble des étudiant.es présent.es aujourd'hui en amphi, alors

$$(2\mathbb{Z}+4)\cap(2\mathbb{Z}+1)\subset A.$$

VRAI. Comme tout $n\in(2\mathbb{Z}+4)\cap(2\mathbb{Z}+1)$ doit être de la forme :

- $n=2k+4=2(k+2)$ avec $k\in\mathbb{Z}$, donc n est pair ;
- $n=2k'+1$ avec $k'\in\mathbb{Z}$, donc n est impair.

Ainsi $(2\mathbb{Z}+4)\cap(2\mathbb{Z}+1)=\emptyset$ et on sait que $\emptyset\subset A$ (toujours vrai).

Vrai/Faux 3

On a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \emptyset$.

Vrai/Faux 3

On a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \emptyset$.

FAUX. On a en fait $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Vrai/Faux 3

On a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\emptyset$.

FAUX. On a en fait $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$.

En effet, par double inclusion :

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\in\left]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right[$, donc $\{0\}\subset\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$.

Vrai/Faux 3

On a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \emptyset$.

FAUX. On a en fait $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

En effet, par double inclusion :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, donc $\{0\} \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.
2. Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$$

Vrai/Faux 3

On a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\emptyset$.

FAUX. On a en fait $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$.

En effet, par double inclusion :

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\in\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$, donc $\displaystyle\{0\}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$.
2. Soit $\displaystyle x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x\in\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$, donc
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$$
et donc, en prenant la limite quand $n\to+\infty$ (les inégalités strictes deviennent larges), on obtient (th. des gendarmes) que $x=0$, donc
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\subset\{0\}.$$