Vrai ou Faux ? A propos du CM du 26/09

Algèbre 1
03/10/2025

Vrai/Faux 1

Les propositions P et Q suivantes sont équivalentes :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

Vrai/Faux 1

Les propositions P et Q suivantes sont équivalentes :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

FAUX. Elles ne sont pas équivalentes puisque :

- P est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 1 \Rightarrow x \in]-1, 1[\Rightarrow x < 1$.
- Q est fausse (par ex. pour $x = -2$) car $(-2)^2 = 4$ et $-2 < 1$.

Vrai/Faux 1

Les propositions P et Q suivantes sont équivalentes :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$$
$$Q : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

FAUX. Elles ne sont pas équivalentes puisque :

- P est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 1 \Rightarrow x \in]-1, 1[\Rightarrow x < 1$.
- Q est fausse (par ex. pour $x = -2$) car $(-2)^2 = 4$ et $-2 < 1$.

En fait, P est équivalente à sa contraposée (qui est donc vraie) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1.$$

Vrai/Faux 2

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Vrai/Faux 2

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

FAUX. Cette série d'équivalences est forcément fausse puisque $x = 0$ satisfait aussi l'équation $x^2 + x = 0$.
En fait :

- on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0$
- par contre,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Vrai/Faux 2

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

FAUX. Cette série d'équivalences est forcément fausse puisque $x = 0$ satisfait aussi l'équation $x^2 + x = 0$.
En fait :

- on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0$
- par contre,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Finalement on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$

Vrai/Faux 3

On dit que $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Alors $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Vrai/Faux 3

On dit que $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Alors $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

VRAI. Il suffit de :

- nier les prédicats avec des quantificateurs ($\forall \leftrightarrow \exists$)
- utiliser le fait que non($P \Rightarrow Q$) $\iff$ P et non(Q), avec :
  - P : $n \geq N$,
  - Q : $|u_n - \ell| < \varepsilon$, et donc non($Q$): $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.