Fiche méthodologique : téléscopage / changement d'indice

Laurent Bétermin

On explique ici comment rédiger correctement le calcul d'une somme téléscopique et, quand c'est nécessaire (lorsqu'on ne peut pas appliquer directement la formule du cours), un changement d'indice. *(les parties en bleu sont des commentaires)*

Enoncé 1. Soit $n \geq 3$ un entier. Calculer $\sum_{k=3}^{n} (\sin(k+1) - \sin(k))$.

Soit $n \geq 3$ un entier. Par téléscopage, on a directement

$$\sum_{k=3}^{n} (\sin(k+1) - \sin(k)) = \sin(n+1) - \sin(3).$$

(Ici, on reconnaît la formule du cours sur les sommes téléscopiques $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$ avec, pour tout entier k, $a_k = \sin(k)$, et $p = 3$. On peut donc l'appliquer directement.)

Enoncé 2. Soit $n \geq 2$ un entier, calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{6}{k(k+3)}$.

Soit $n \geq 2$ un entier. On remarque que, pour tout entier $k > 0$, on a

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} = \frac{k+3-k}{k(k+3)} = \frac{3}{k(k+3)},$$

ce qui implique $\frac{6}{k(k+3)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+3}$

(On n'oublie évidemment pas d'introduire n, puis k. Ici, comme pour toute somme téléscopique, il faut commencer par écrire la quantité sommée comme différence de deux expressions.
Parfois (cf. TD), il peut y avoir une question intermédiaire du type "déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier $k > 0$ $\frac{6}{k(k+3)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+3}$ ".On peut résoudre cette question intermédiaire comme ce qui est écrit plus haut, ou bien en écrivant :
pour tout entier $k > 0$ et tous réels a et b, on a

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3) - bk}{k(k+3)} = \frac{(a-b)k + 3a}{k(k+3)}$$

et donc, par identification, on doit avoir $a - b = 0$ et $3a = 6$, d'où $a = b$ et $a = 2$, c'est-à-dire $a = b = 2$.)

et ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{6}{k(k+3)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+3}\right) \\
&= 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+3} \quad \text{par linéarité,} \\
&= 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=5}^{n+3} \frac{1}{j} \quad \text{où on a posé } j = k+3 \text{ dans la deuxième somme,} \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + 2\sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=5}^{n} \frac{1}{j} - 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{2(13n^3 + 42n^2 - n - 54)}{12(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

(*Ici, une fois que la somme initiale est devenue une différence de deux sommes (lignes 1 et 2), on ne peut pas appliquer la formule du cours directement. On doit donc :*

1. *effectuer un changement d'indice (ligne 3) afin que les deux sommes soient similaires (à part les bornes) ;*
2. *découper chaque somme de manière à faire apparaître les termes qui se simplifient entre eux (ligne 4) ;*
3. *on simplifie, et enfin on calcule la quantité qui reste (lignes 5 et 6).)*