Feuille 9 : Arithmétique – PGCD, PPCM, Divisibilité, Nombres premiers

A. Exercices standards

Exercice 1 – Vrai ou Faux

Etant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux :

1. *Au moins deux multiples de* 2 *dont un multiple de* 4.
2. *Au plus trois nombres pairs*
3. *Au moins deux multiples de* 3
4. *Exactement un multiple de* 5.
5. *Au moins un multiple de* 6.
6. *Au moins un nombre premier.*

Exercice 2 – Vrai ou Faux

Soient a, b *et* d *trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

1. *Si* d *divise* a *et* b, *alors* d *divise leur* $PGCD$.
2. *S'il existe deux entiers* u *et* v *tels que* $au + bv = d$, *alors* d *divise* $PGCD(a, b)$.
3. *Si* $PGCD(a, b)$ *divise* d, *alors il existe un couple d'entiers* (u, v), *tel que* $au + bv = d$

Exercice 3 – Calcul de pgcd entre deux entiers

1. *Calculer le pgcd de* 48 *et* 210, *et de* 81 *et* 237. *Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.*
2. *Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de* 18480 *et* 9828. *En déduire une écriture de* 84 *comme combinaison linéaire de* 18480 *et* 9828.

Exercice 4 – Utilisation du pgcd et du ppcm

1. *Déterminer les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit est 6.*
2. *Déterminer les couples d'entiers naturels dont le pgcd est 35 et le ppcm est 210.*
3. *Déterminer les couples d'entiers naturels dont le pgcd est 18 et le produit est 6480.*

Exercice 5 – Divisibilité et nombre premier

Soient a, b *des entiers supérieurs ou égaux à* 1. *Montrer :*

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$ *;*
2. $2^p - 1$ *premier* $\Rightarrow$ p *premier .*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Division euclidienne

Pour m entier naturel, à quoi peut être égal le reste de la division euclidienne de m par 4 ? En déduire que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 7 – Divisibilité

Quel est le plus petit entier naturel, qui, divisé par 8, 15, 18 et 24 donne pour restes respectifs 7, 14, 17 et 23 ?

Exercice 8 – PGCD

Soit n un entier relatif. On pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1. *Calculer $5a - 2b$. En déduire le PGCD de a et b en fonction de n.*
2. *Procéder de même pour exprimer en fonction de n le PGCD de $2n - 1$ et $9n + 4$.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Entiers premiers entre eux

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 10 – Pgcd

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360.

Exercice 11 – PGCD et Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $0 < a < b$.

1. *Démontrer que si a divise b alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a - 1$ divise $n^b - 1$.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le reste de la division euclidienne de $n^b - 1$ par $n^a - 1$ est $n^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de b par a.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le PGCD de $n^b - 1$ et $n^a - 1$ est $n^d - 1$ où d est le pgcd de a et b.*

Exercice 12 – Divisibilité et nombres premiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. *Démontrer que si n n'est divisible par aucun entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.*
2. *Démontrer que les nombres $n! + 2$, $n! + 3$, $\cdots$,$n! + n$ ne sont pas premiers.*
3. *En déduire que pour tout n, il existe n entiers consécutifs non premiers.*