

Feuille 8 : Nombres Complexes - Géométrie et équations

A. Exercices standards

Exercice 1 – Vecteurs du plan complexe

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$

a) $z = 1 - i$, b) \bar{z} , c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

a) \vec{w} d'affixe $2 + i$, b) \vec{a} d'affixe $-3 + 2i$, c) $\vec{w} + \vec{a}$, d) $2\vec{w} - \vec{a}$.

Exercice 2 – Ensembles de points du plan complexe

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$ c) $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$

Exercice 3 – Transformations du plan et nombres complexes

1. Donner les applications de \mathbb{C} qui représentent les transformations du plan suivantes.

- a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.
- b) L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.
- c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
- d) La symétrie centrale du centre i .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. b) $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. c) $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$. d) $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$.

3. Déterminer par le calcul l'image de $2 + i$ par la rotation de centre i et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis retrouver ce résultat avec un dessin.

Exercice 4 – Racines n-ièmes

- 1. Déterminer les racines carrées de $1 + i$.
- 2. Déterminer les racines carrées de $9 + 40i$.
- 3. Déterminer les racines 5-ièmes de $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 4. Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^3 = -i$.

5. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les solutions de l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Exercice 5 – Equations dans \mathbb{C}

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z , dans \mathbb{C} :

a) $2z^2 - z - 1 = 0$; b) $z^2 + z + 1 = 0$; c) $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$;
d) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Equations dans \mathbb{C}

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z , dans \mathbb{C} :

$$\begin{array}{lll} a) z^3 + 3z - 2i = 0, & b) z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0, & c) \bar{z}^7 = \frac{1}{z^2} \\ d) z^5 - z = 0, & e) 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0. & \end{array}$$

Exercice 7 – Racines n-ième et rotation

1. Donner les formes algébrique et exponentielle du nombre complexe $w = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.
2. Déterminer l'ensemble S_w des racines 6-ième du nombre complexe w .
3. Donner l'expression de la rotation f centrée en 0 et d'angle $-\frac{\pi}{9}$.
4. Montrer que $f(S_w)$ est l'ensemble des racines 6-ièmes d'un réel que l'on déterminera.

Exercice 8 – Transformation complexe

Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

où on pose $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{P}$, on a $|f(z)| < 1$.
(Indication : on pourra montrer que $|z - i|^2 < |z + i|^2 \iff \operatorname{Im} z > 0$)

A partir de maintenant, on considère l'application $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{D}$ définie par $F(z) = f(z)$, où on pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

2. Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$. Montrer que $F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
3. Soit $w \in \mathbb{D}$.
 - i) Déterminer $z \in \mathbb{C}$ (en fonction de w) tel que $w = F(z)$.
 - ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ donné par la question précédente. $\operatorname{Im} z$ est-elle strictement positive ? Justifier votre réponse.
 - iii) L'application F est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Ensembles de points du plan

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\begin{array}{lll} a) |1 + i - z|^2 \geq 2 & b) \operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} & c) \left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| < 2 \end{array}$$

Exercice 10 – Transformations du plan

Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'homothétie de rapport 2 et de centre $1 - i$ et $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la rotation de centre -2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'expression de $h \circ r$, puis de $r \circ h$.

Exercice 11 – Racines n-ièmes

1. Déterminer les racines carrées de $i - 1$, puis de $7 + 24i$.
2. Déterminer les racines 4-ièmes de $16i$, puis de $\frac{1}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 12 – Equations dans \mathbb{C}

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z , dans \mathbb{C} :

$$\begin{array}{ll} a) 3z^2 - \sqrt{8}z + 1 = 0 & b) (1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0 \\ c) z^4 + z^2 + 1 = 0. & \end{array}$$