Feuille 7 : Nombres Complexes - Calculs de base

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes, produits et quotients dans $\mathbb{C}$

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 5i$, *b)* $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, *c)* $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,

d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, *e)* $z = \dfrac{4 - 3i}{5 + 2i}$, *f)* $z = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,

g) $z = \dfrac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Exercice 2 – Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$:

a) $z + 1$, *b)* $z^2 + 3i$, *c)* $\bar{z} + 2z$, *d)* $\bar{z} + z - i$,

e) $z^3 + 1$, *f)* $iz^2 - 3\bar{z}$, *g)* $z - \bar{z} + iz$, *h)* $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Exercice 3 – Module d'un nombre complexe : calculs et propriétés

1. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

   a) $z = 2 + 5i$, *b)* $z = -3 + 2i$, *c)* $z = (3 - 2i)(9 + i)$, *d)* $z = \dfrac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

2. *Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :*

   a) $z\bar{z}$, *b)* $2z^2$, *c)* $\dfrac{2}{\bar{z}}$, *d)* $3\dfrac{\bar{z}^2}{z}$.

Exercice 4 – Module, arguments et formes exponentielle/trigonométrique

1. *Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis en donner les formes trigonométriques et exponentielles :*

   a) $u = -3$, *b)* $v = 1 - i$, *c)* $w = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, *d)* $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

2. *En déduire le module, un argument et les formes trigonométriques et exponentielles de uw et $\dfrac{z}{v}$.*

Exercice 5 – Utilisation des complexes en trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$*, puis* $\sin(3x)$ *en fonction de* $\sin(x)$.
2. *Linéariser* $\sin^4(x)$ *(c'est-à-dire l'écrire comme une somme de* $\cos(ax)$ *et* $\sin(bx)$ *avec des a et b entiers).*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Partie réelle/imaginaire d'un complexes avec paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_m = \dfrac{1+im}{2m+i(m^2-1)}$.

Exercice 7 – Récurrence et nombres complexes

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en notant $i \in \mathbb{C}$ le nombre tel que $i^2=-1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2}.$$

<u>Indication :</u> *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser le fait que $i^{n+2} = \alpha i^n$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$ à déterminer.*

Exercice 8 – Forme exponentielle

Soient $(a,b) \in]0,\pi[^2$. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $u = 1 + e^{ia}$, *b)* $v = 1 - e^{ia}$, *c)* $w = e^{ia} + e^{ib}$, *d)* $z = \dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

Exercice 9 – Sommes d'exponentielles complexes

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les deux sommes suivantes, appelées respectivement n-ième noyaux de Dirichlet et de Fejér.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 10 – Sommes, produits et quotients de nombres complexes

1. *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$ *définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3,0\}$. Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$.*
2. *Soit* $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. *Calculer z^4.*

Exercice 11 – Modules et arguments (faciles)

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $u = -1$, *b)* $v = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, *c)* $w = -3e^{-i\pi}$, *d)* $z = \dfrac{2}{i}$.

Exercice 12 – Modules et arguments (un peu plus difficile)

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $u = \sqrt{3} + 3i$, *b)* $v = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$, *c)* $w = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$, *d)* $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 13 – Utilisation des complexes en trigonométrie

1. *Calculer* $\cos^2(x)\sin^3(x)$ *en fonction de* $\sin(x)$.
2. *Linéariser* $\cos^4(x)$.