Feuille 6 : Applications

A. Exercices standards

Exercice 1 – Applications et quantificateurs

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1) f s'annule *2) f est l'application nulle*
3) f n'est pas une application constante *4) f ne prend jamais deux fois la même valeur*
5) f s'annule au plus une fois

Exercice 2 – Exemples d'images directes et réciproques d'ensembles

1. *Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :*

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$

   (a) *Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.*
   (b) *Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.*

Exercice 3 – Applications sur des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que pour toutes parties disjointes A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. *Montrer que $f(\emptyset) = 0$.*
2. *Montrer que pour toutes parties A et B de E telles que $A \subset B$, on a $f(B \backslash A) = f(B) - f(A)$.*
3. *Montrer que pour toutes parties A et B de E on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.*
4. *On considère maintenant une application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ quelconque.*
   a) *Soient $I, J \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, montrer que $I \subset J \Rightarrow f^{-1}(I) \subset f^{-1}(J)$. La réciproque est-elle vraie ?*
   b) *Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que pour toute partie I de $\mathbb{R}$, $f(f^{-1}(I)) \subset I$.*

Exercice 4 – Injectivité, surjectivité et bijectivité

1. *Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Si l'une d'elle est bijective, déterminer sa bijection réciproque.*

a) $\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$ c) $\begin{array}{ll} f : \{2,3\} & \longrightarrow \{1\} \\ x & \mapsto 1 \end{array}$ d) $\begin{array}{ll} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n^2 - 1 \end{array}$

e) $\begin{array}{ll} f :]e, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(\ln(\ln x)) \end{array}$ f) $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \mapsto (s+t, s-t) \end{array}$ g) $\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{array}$ h) $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$

2. a) *On définit $f :\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par $f(m, n) = mn$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*
   b) *On définit $g :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g(k) = (k, (k + 1)^2)$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*

Exercice 5 – Composition

1. *Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?*
2. *À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :*

   (a) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; (b) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$; (c) $h(x) = \sqrt{3x - 1}$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.*

1. *Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.*
2. *Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.*
3. *On suppose maintenant que $E = F$ et $f(f(E)) = E$. Montrer que f est surjective.*

Exercice 7 – Composition et injectivité, bijectivité, surjectivité
Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. *Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?*
4. *Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
5. *Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
6. *Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :*

   (a) $g \circ f = \mathrm{id}_E$; *(b)* $f \circ g = \mathrm{id}_F$; *(c)* $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 8 – Bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$
On suppose connu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels (m, j) avec $0 \leq j \leq m$ tel que

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + j.$$

On définit alors $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (m - j, j)$.

1. *Placer les points $f(k)$ pour $0 \leq k \leq 9$.*
2. *Montrer que f est une bijection.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Exemples d'images directes et réciproques
Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0,1])$ *pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1])$ *pour* $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0,1])$ *pour* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0,1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0,1])$;
12. $\cos^{-1}([0,1])$;

Exercice 10 – Injectivité, surjectivité, bijectivité
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Si l'une d'elle est bijective, déterminer sa bijection réciproque.

1) $\begin{array}{rl} f : \{1\} & \longrightarrow \{1/2\} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x+1} \end{array}$ *2)* $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \mapsto (3s+t, s-2t) \end{array}$ *3)* $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \mapsto -\sin(x) \end{array}$

Exercice 11 – Composition

1. *Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*
2. *Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*