Feuille 5 : Ensembles

A. Exercices standards

Exercice 1 – Vocabulaire et parties de $\mathbb{R}$

On note

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : n^2 \leq 10\}, \quad B = \{0, 1, 2, 3\}, \quad C = [1, 3], \quad D = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \in [4, 14[\}$$

$$E =]-\infty, 3], \quad F =]-2, 7], \quad G = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -6 \text{ et } x^2 + 12x + 35 > 0\}.$$

1. *Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.*

a) $1 \in A$	*b)* $B \not\subset \mathbb{Z}$	*c)* $\{2\} \in C$	*d)* $D \subset \mathbb{N}$
e) $B \subset \mathbb{Q}^*$	*f)* $F \in G$	*g)* $E \subset \mathbb{R}$	*h)* $\sqrt{\pi} \subset F$

2. *Déterminer* $A \cap B$, $A \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $F \cup G$, $\mathbb{R} \backslash E$, B^c, $B \backslash A$, $C \backslash A$, $G \backslash E$.
3. *Déterminer* $A \times B$, $C \times D$, $D \times G$ *et* $A \times F$, *et les représenter.*

Exercice 2 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient A *et* B *deux ensembles. Montrer les assertions suivantes :*

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$;
3. $A \backslash B = A \iff B \backslash A = B$.

Exercice 3 – Parties d'un ensemble

Soient E *et* F *deux ensembles.*

1. *Si* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, *déterminer* $\mathcal{P}(E)$.
2. *Les ensembles* $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ *et* $\mathcal{P}(E \cap F)$ *sont-ils égaux ?*
3. *Même questions pour les ensembles* $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ *et* $\mathcal{P}(E \cup F)$.

Exercice 4 – Inclusions d'ensembles

Montrer sur un dessin (pour 1. et 2.), puis à l'aide d'une preuve, les assertions suivantes :

1. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ ou } x \geq -1\} \not\subset [-2, 2]$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \text{ et } x \geq 0\} \subset (\mathbb{R}_+)^2$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in \mathbb{R}, x = 2t \text{ et } y = t^2 + 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.

Exercice 5 – Différence symétrique

Soit E *un ensemble. Pour tous sous-ensembles* A *et* B *de* E, *on note* $A \Delta B$ *la différence symétrique de* A *et* B *l'ensemble*

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. *Faire un diagramme de Venn pour illustrer ce que représente cet ensemble.*
2. *Si* $A = [0, 3]$ *et* $B = [2, 3[$, *déterminer* $A \Delta B$.
3. *Montrer que, pour toutes parties* A *et* B *de* E, $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
4. *Soient* A *et* B *des parties de* E. *Déterminer* $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta A^c$.

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Produit cartésien

1. *Soient E et F deux ensembles, $\{A, C\} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\{B, D\} \subset \mathcal{P}(F)$. Montrer que l'on a*
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$
2. *Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux ensembles.*

Exercice 7 – Différence symétrique, le retour

Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A, B et C de E, montrer que :

1. $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$ *;*
2. $A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A$ *;*
3. $(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A$ *;*
4. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 8 – L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas

On se propose ici de montrer qu'il n'existe aucun ensemble E tel que $\mathcal{P}(E) \subset E$. Par l'absurde, on suppose qu'un tel ensemble existe.

1. *Expliquer en quoi consiste alors l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin x\}$.*
2. *Justifier l'équivalence $A \in A \iff A \notin A$.*
3. *En déduire que E n'existe pas.*
4. *Montrer en quoi ce résultat assure que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Vocabulaire et intervalles

On considère les ensembles
$$E = \{-1, 2, 6\}, \quad F = [-3, 1] \quad \text{et} \quad G =]-2, +\infty[.$$

1. *Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger-les si nécessaire.*

a) $1 \in F$ *b)* $\{0\} \in G$ *c)* $E \subset G$ *d)* $F \in \mathbb{R}$

2. *Déterminer $E \cap F$, $F \cap G$, $F \cup G$, $G \backslash F$, $G \backslash E$, $\mathbb{R} \backslash G$, $\mathbb{Q} \cap E$ et $\mathbb{N} \cap E$.*
3. *Déterminer $E \times F$ et $F \times G$, et les représenter.*

Exercice 10 – Démontrer des propriétés sur les ensembles

Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E.

1. *On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.*
2. *Montrer que $(A \backslash C) \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$ et $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$.*

Exercice 11 – Parties d'un ensemble

Soit $E = \{0, 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $E \times E$ et $\mathcal{P}(E \times E)$.

Exercice 12 – Inclusion d'ensembles

1. *Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\} \not\subset \mathbb{Z}$.*
2. *Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3x + 5 \text{ et } x \geq 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$.*