Feuille 4 : Types de raisonnements

A. Exercices standards

Exercice 1 – Raisonnements par récurrence

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 3^n$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres entiers naturels définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ *et* $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. *Établir la propriété*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3^n.$$
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = u_1 = -1$ *et* $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ *pour tout entier naturel* n.

Exercice 2 – Raisonnement par récurrence forte

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer par récurrence forte que l'on a* $u_n = 2^{n-1}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Exercice 3 – Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Le but de cet exercice est de démontrer, par l'absurde, que le nombre réel $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*
Supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p *et* q *tels que* $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

1. *Vérifier que l'on a* $p^2 = 2q^2$.
2. *Justifier que l'on peut supposer que* p *et* q *sont premiers entre eux.*
3. *Démontrer que* p *est pair.*
4. *En déduire que* q *est pair.*
5. *En déduire que* p *et* q *n'existent pas.*

Exercice 4 – Démontrer qu'une inégalité est fausse

Démontrer que la proposition suivante est fausse
$$\forall\, x \in]-\infty, 1[,\ 2^{3^x}(\ln(1-x)+1)(3x^3 + xe^x - 4) \geq 0.$$

Exercice 5 – Raisonnement par contraposée

On définit la proposition suivante :
P : "pour tout entier $n \geq 2$, *si l'entier* $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par 8 alors* n *est pair."*

1. *Déterminer la contraposée de P.*
2. *Montrer que tout entier impair* n *s'écrit* $n = 4k + r$ *où* $r \in \{1, 3\}$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
(Indication : écrire $n = 2p + 1$ *puis faire deux cas en fonction de la parité de* p.*)*
3. *Prouver la contraposée de la proposition P. Que peut-on en déduire ?*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Différents types de raisonnements

1. *Soient a, $b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.*
2. *(Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).*
3. *(Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)*
4. *(Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.*
5. *(Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?*
6. *(Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

***Exercice 7* – Disjonction de cas et raisonnement non-constructif**

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$. Pour cela, on raisonne par disjonction de cas.

1. *Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, déterminer des irrationnels a et b tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.*
2. *Même question si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.*
3. *Conclure.*

***Exercice 8* – Somme d'irrationnels**

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante :
P : "si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels".

1. *Quelle est la contraposée de cette P ? Démontrer P.*
2. *Enoncer la réciproque de P. Est-ce que cette réciproque est toujours vraie ?*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

***Exercice 9* – Raisonnement par récurrence**

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 3$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$

***Exercice 10* –Récurrence et initialisation**

Pour tout nombre entier naturel n, on définit la propriété $P(n)$: "$2^n > n^2$".

1. *Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.*
2. *Pour quels entiers n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ?*

***Exercice 11* – Raisonnements par l'absurde**

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

***Exercice 12* – Raisonnements par contraposée**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère la proposition suivante :
P : "si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geq M$, alors il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $a_i \geq \dfrac{M}{n}$".

1. *Enoncer la contraposée de P.*
2. *Démontrer P.*