Feuille 4 : Types de raisonnements

A. Exercices standards

Exercice 1 – Raisonnements par récurrence

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 3^n$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres entiers naturels définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ *et* $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. *Établir la propriété*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3^n.$$
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = u_1 = -1$ *et* $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ *pour tout entier naturel* n.

Exercice 2 – Raisonnement par récurrence forte

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer par récurrence forte que l'on a* $u_n = 2^{n-1}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Exercice 3 – Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Le but de cet exercice est de démontrer, par l'absurde, que le nombre réel $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*
Supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p *et* q *tels que* $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

1. *Vérifier que l'on a* $p^2 = 2q^2$.
2. *Justifier que l'on peut supposer que* p *et* q *sont premiers entre eux.*
3. *Démontrer que* p *est pair.*
4. *En déduire que* q *est pair.*
5. *En déduire que* p *et* q *n'existent pas.*

Exercice 4 – Démontrer qu'une inégalité est fausse

Démontrer que la proposition suivante est fausse

$$\forall\, x \in]-\infty, 1[,\ 2^{3^x}(\ln(1-x)+1)(3x^3 + xe^x - 4) \geq 0.$$

Exercice 5 – Raisonnement par contraposée

Pour tout entier $n \geq 2$, *on définit la proposition suivante :*
$P(n)$ *: « si l'entier* $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par 8 alors* n *est pair. »*

1. *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Déterminer la contraposée de* $P(n)$.
2. *Montrer que tout entier impair* n *s'écrit* $n = 4k + r$ *où* $r \in \{1, 3\}$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
(Indication : écrire $n = 2p + 1$ *puis faire deux cas en fonction de la parité de* p.*)*
3. *Soit* $n \geq 2$. *Prouver la contraposée de la proposition* $P(n)$. *Que peut-on en déduire ?*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Différents types de raisonnements

1. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$. *Montrer que si* $a \leq b$ *alors* $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ *et* $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. *(Cas par cas) Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ *est divisible par 2 (distinguer les* n *pairs des* n *impairs).*
3. *(Contraposée ou absurde) Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Montrer que si* $b \neq 0$ *alors* $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *(On utilisera que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*)*
4. *(Absurde) Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\sqrt{n^2+1}$ *n'est pas un entier.*
5. *(Contre-exemple) Est-ce que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $x < 2 \implies x^2 < 4$ *?*
6. *(Récurrence) Fixons un réel* $x \geq 0$. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

***Exercice 7* – Disjonction de cas et raisonnement non-constructif**

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *et* $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *tels que* $a^b \in \mathbb{Q}$. *Pour cela, on raisonne par disjonction de cas.*

1. *Si* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, *déterminer des irrationnels* a *et* b *tels que* $a^b \in \mathbb{Q}$.
2. *Même question si* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. *Conclure.*

***Exercice 8* – Somme d'irrationnels**

Soit a *et* b *deux réels. On considère la proposition suivante :*
P *: "si* $a + b$ *est irrationnel, alors* a *ou* b *sont irrationnels".*

1. *Quelle est la contraposée de cette* P *? Démontrer* P.
2. *Enoncer la réciproque de* P. *Est-ce que cette réciproque est toujours vraie ?*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

***Exercice 9* – Raisonnement par récurrence**

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ *la suite définie par* $u_2 = 3$ *et, pour tout* $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3}$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$

***Exercice 10* –Récurrence et initialisation**

Pour tout nombre entier naturel n, *on définit la propriété* $P(n)$ *: "*$2^n > n^2$*".*

1. *Démontrer que, pour* $n \geqslant 3$, *l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*
2. *Pour quels entiers* n *la propriété* $P(n)$ *est-elle vraie ?*

***Exercice 11* – Raisonnements par l'absurde**

Soit $n > 0$. *Démontrer que si* n *est le carré d'un entier, alors* $2n$ *n'est pas le carré d'un entier.*

***Exercice 12* – Raisonnements par contraposée**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. *On considère la proposition suivante :*
P *: "si* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geq M$, *alors il existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tel que* $a_i \geq \dfrac{M}{n}$*".*

1. *Enoncer la contraposée de* P.
2. *Démontrer* P.