Feuille 3 : Bases de logique

A. Exercices standards

Exercice 1 – Table de vérité, négation et équivalence de prédicats

Soient P, Q, R des prédicats.

1. a) *Ecrire la table de vérité de* $non(P \Rightarrow Q)$ *et celle de* $(P$ *ou non* $Q)$.
   b) *Ecrire la table de vérité de* $(P \Rightarrow Q)$ *ou* $((non\ R)$ *et* $P))$.
2. *Montrer que :*
   a) $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ *équivaut à* $(P$ *et* $Q) \Longrightarrow R$.
   b) $(P$ *ou* $Q) \Longrightarrow R$ *équivaut à* $(P \Longrightarrow R)$ *et* $(Q \Longrightarrow R)$.

Exercice 2 – Implication et divisibilité

Soient a et b deux entiers naturels. On considère les deux assertions P et Q définies par :

$$P : (a \text{ divise } b) \Longrightarrow (a^2 \text{ divise } b) \quad \text{et} \quad Q : (a^2 \text{ divise } b) \Longrightarrow (a \text{ divise } b).$$

a) *Donner la négation de P, ainsi que celle de Q.*

b) *Lesquelles des propositions P, Q, $(non\ P)$, $(non\ Q)$ sont-elles vraies ?*

Exercice 3 – Quantificateurs et négation

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x|$ *ou* $x = -|x|)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$
3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$
4) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$

Exercice 4 – Implications et équivalences

1. *Compléter les pointillés ci-dessous par le symbole mathématique approprié (implication ou équivalence)*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \cdots\cdots\cdots x = 2$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \cdots\cdots\cdots x^2 \geq 9$
c) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x = \pi \cdots\cdots\cdots \cos(x) = -1$

2. *Les propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, y \in \mathbb{R}^*,\ x < y \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
c) $\exists\, x \in \mathbb{R}_+,$ *tel que* $x < \sqrt{x}$

Exercice 5 – Condition nécessaire, condition suffisante

Soit P et Q deux propositions. Traduire les propositions suivantes à l'aide des symboles mathématiques.

1. *Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie*
2. *Pour que P soit vraie, il suffit que Q soit vraie*
3. *La proposition Q est une condition suffisante de la proposition P.*
4. *Pour qu'un réel x soit supérieur à 2, il suffit que $x > 4$.*
5. *Pour qu'un réel x soit supérieur à 2, il est nécessaire que $x > 0$.*
6. *Pour que $x^2 = 1$ il faut et il suffit que $x = 1$ ou $x = -1$.*

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Expressions avec des quantificateurs et leurs négations

1. *Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes définies sur $\mathbb{N}$:*
   a) *Tout entier est le carré d'un entier.*
   b) *Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.*
   c) *Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.*
   d) *Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.*
   e) *L'entier n est impair.*
2. *Exprimer la négation de ces propositions*

Exercice 7 – Quantificateurs et fonctions nulles... ou pas !

1. *Dans chacun des cas suivants, les propositions P et Q sont-elles équivalentes ?*
   a) $P : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$; $Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
   b) $P : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$; $Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
2. *Donner un exemple de fonctions f et g, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.*

Exercice 8 – Carré et parité

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Montrer que : n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair. La réciproque est-elle vraie ?*
2. *En déduire que : n^2 impair $\iff$ n impair.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Tautologie

Soient P, Q des propositions. Montrer que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \text{ et } Q))$ est une tautologie.

Exercice 10 – Implications et équivalences

Compléter si cela est possible avec $\Longrightarrow$ ou $\iff$:

1. *Pour tout réel x* : $(x-1)(x+2) = (x-1)(3x+5)$ .... $x+2 = 3x+5$
2. *Pour tout réel $x \neq 1$* : $(x-1)(x+2) = (x-1)(3x+5)$ .... $x+2 = 3x+5$
3. *Pour tout réel $x \neq 2$* : $\dfrac{2x-3}{x-2} > 1$ .... $2x-3 > x-2$
4. *Pour tout réel $x > 2$* : $\dfrac{2x-3}{x-2} > 1$ .... $2x-3 > x-2$

Exercice 11 – Contraposée

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la proposition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Longrightarrow x \leq 0.$$

1. *Exprimer la négation de cette proposition.*
2. *Montrer cette proposition.*

Exercice 12 – Quantificateurs et négation

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.