Feuille 1 : Calculs de base

A. Exercices standards

Exercice 1 – Sommes, produits, fractions, puissances et racines
Soit x et y des réels et n un entier naturel ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1) $(125)^{-2/3}$ *2)* $\dfrac{(-2)^3 \cdot 4^6}{8 \cdot (-4)^2}$ *3)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ *4)* $-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} + 9\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

5) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{\frac{2}{7}}{4} \cdot \dfrac{6-\frac{2}{5}}{\frac{5}{7}-\frac{1}{2}}$ *6)* $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ *7)* $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$ *8)* $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$

9) $\dfrac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$ *10)* $\dfrac{y}{5x-y} + \dfrac{5x}{y-5x} + 1$ *11)* $\dfrac{2^{2^n}}{2} \cdot (-2)^{2n-3} \cdot (2^n)^{-2}$

Exercice 2 – Identités remarquables
Soient x, y et z trois réels. Développer les expressions de 1) à 3), factorisez celles de 4) à 5) et simplifiez celles de 6) à 8).

1) $(x+y)^2 + (x-y)^2$ *2)* $3(-4x+y)^2 - 2(x-5y)^2$ *3)* $(x+y+z)^2$

4) $x^7 - 128$ *5)* $x^9 + 1$ *6)* $\dfrac{\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}}{3x+5}$

7) $\dfrac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}}$ *8)* $\dfrac{1 + x^5}{x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6}}$

Exercice 3 – Factorisation et simplification
Soit x et y deux réels. On suppose que $x - y = 1$. Calculer $x^3 - 3xy - y^3$.

Exercice 4 – Simplifications avec des racines carrées
Simplifiez les expressions suivantes.

1) $A = 4\sqrt{54} - 3\sqrt{96} + 2\sqrt{24}$ *2)* $B = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

3) $C = \dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ *4)* $D = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Exercice 5 – Signes, puissances et simplification
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \{0, -1\}$. Simplifier l'expression suivante :

$$A_n = \left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1}}{x^n(1+x)} + \frac{x^2 - x + 1}{x^{n+1}(x^3+1)}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$$

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Identité avec des radicaux
Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$ deux réels, montrer que

$$\sqrt{x + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{y + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}^{\,3}.$$

Exercice 7 – Histoires de carrés
Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Montrer que $a = b = c = d$.
<u>Indication :</u> on pourra développer $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2$.

Exercice 8 – Identité de Gauss
Soient a, b et c trois réels. Montrer que si $a + b + c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Fractions
Calculer les expression suivantes :

1) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{4} + \dfrac{5}{12}$ *2)* $-3 + \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3}$ *3)* $\dfrac{\frac{2}{3}}{4} - \dfrac{3}{\frac{5}{7}}$

4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ *5)* $\dfrac{1}{\frac{4}{5}} \cdot \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\left(2 - \frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^3}$

Exercice 10 – Puissances
Calculer les expressions suivantes :

1) $\dfrac{27^{-1} \cdot 4^2}{3^{-4} \cdot 2^4}$ *2)* $\left((-2)^3 + (-5)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ *3)* $\dfrac{\left(10^5 \cdot 10^{-3}\right)^5}{\left(10^{-5} \cdot 10^3\right)^{-3}}$

4) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ *5)* $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$

Exercice 11 – Racines carrées
Ecrire plus simplement les expressions suivantes (calcul, dénominateur entier) :

1) $\sqrt{(-5)^2} - \sqrt{5}^2$ *2)* $\sqrt{(3-\pi)^2}$ *3)* $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

4) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ *5)* $\dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dfrac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Exercice 12 – Identités remarquables
Soient x, y, z et t quatre réels tels que les expressions suivantes soient bien définies. Simplifier :

1) $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1} + 1$ *2)* $(xt + yz)^2 + (xz - yt)^2 - (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ *3)* $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - (x-1)^2$

4) $\dfrac{2x + 1}{\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2}}$ *5)* $\dfrac{(x+y)^4 - (x-y)^4}{4xy} - 2(x-y)^2$