Feuille 11 : Propriétés basiques des polynômes

A. Exercices standards

Exercice 1 – Degré et coefficients

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2+1) = P(X)$ *2.* $P(2X+1) = P(X)$

Exercice 2 – Polynômes dérivés, degré et coefficients

On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. *On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.*
   a) *Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ.*
   b) *Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a.*
   c) *Déterminer P.*
2. *Conclure.*

Exercice 3 – Racines de polynômes

Quelles sont les racines (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ 2. $X^6 - 4$ 3. $X^4 - 13X^2 + 36$ 4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 4 – Multiplicité et factorisation

Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. *Déterminer α.*
2. *Montrer que -1 est une racine double de P.*
3. *Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P en remarquant que j est une racine du polynôme $X^2 + X + 1$.*
4. *Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.*

Exercice 5 – Multiplicité et coefficients

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Coefficients et suite de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

Exercice 7 – Polynômes de Techebychev

On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. *Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.*
2. *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.*
3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.*
4. *Donner les racines de P_n.*

Exercice 8 – Factorisations

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. *Après avoir factorisé $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$, en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$, de $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.*
2. *Factoriser le polynôme $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.*
3. *Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Identification

Soient a et b deux réels. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 10 – Degré et coefficients

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. *$P'(X)^2 = 4P(X)$*
2. *$P \circ P(X) = P(X)$*

Exercice 11 – Factorisation

Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. *$X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$*
2. *$X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$*
3. *$X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$*
4. *$X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$*
5. *$X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$*
6. *$X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$*

Exercice 12 – Multiplicité d'une racine et factorisation

Soient a et b deux réels. On considère le polynôme $P(X) = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est racine double de P.

1. *Déterminer a et b.*
2. *Montrer que $-1 + i$ est racine de P.*
3. *Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.*