Feuille 10 : Arithmétique – Bases, Nombres premiers, Équations diophantiennes

A. Exercices standards

Exercice 1 – Changement de base

Donner la valeur en base dix des nombres suivants :

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;

Exercice 2 – Changement de base

Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.

1. 255 *en base deux ;*
2. 1907 *en base seize ;*

Exercice 3 – Équation dans $\mathbb{Z}^2$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

$$(a)\ 1665x + 1035y = 45 \qquad (b)\ 637x + 595y = 29.$$

Exercice 4 – Reste d'une division

1. *Determiner le reste de la division euclidienne de* 5^{1000} *par* 7.
2. *Trouver le reste de la division par* 13 *du nombre* 100^{1000}

Exercice 5 – Équations diophantiennes

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *les entriers* $14n + 3$ *et* $5n + 1$ *sont premiers entre eux.*
2. *On considère l'équation* $(E) : 87x + 31y = 2$ *où* x *et* y *sont des entiers relatifs.*
   (a) *Montrer que* 87 *et* 31 *sont premiers entre eux.*
   (b) *En deduire un couple* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $87u + 31v = 1$, *puis une solution* (x_0, y_0) *de* (E).
   (c) *Déterminer l'ensemble des solutions de* (E).

B. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

Exercice 6 – Nombres premiers et raisonnement

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que X n'est pas vide.*
2. *Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.*
3. *On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.*
   Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. *Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.*

Exercice 7 – Nombres premiers

Soit $a \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ tel que a^n+1 soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n}+1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 8 – Récurrence

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$ on a :*
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right).$$
2. *On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.*
3. *En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.*

C. Exercices d'entraînement (à faire en autonomie)

Exercice 9 – Reste d'une division

1. a) *Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.*
   b) *Déterminer deux entiers u et u tels que $7u + 11v = 1$.*
   c) *En déduire le reste de la division de N par 77.*
2. *Toto veut faire don des livres de sa bibliotheque. Il en a plus de 10. S'il les repartit dans les cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliotheque de Toto ?*

Exercice 10 – Équations diophantiennes

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes

1. $3x - 5y = 13$
2. $212x + 45y = 3$
3. $42x + 45y = 4$
4. $7x + 5y = 3$

Exercice 11 – Congruence

Trouver **une** *solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$ puis* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 0\,[11]$. En déduire* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$.*

Exercice 12 – Équations diophantiennes

Trouver **une** *solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$ puis* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 0$. En déduire* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$.*