Fiche méthodologique : raisonnement par récurrence

Laurent Bétermin

On utilise ce type de raisonnement dit *par récurrence* pour montrer des propriétés qui dépendent de nombres entiers. Traitons un exemple qui permettra de voir précisément comment rédiger et ce qu'il faut faire *(les parties en bleu sont des commentaires)*.

Enoncé : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Il s'agit ici de définir la propriété $P(n)$ que l'on veut démontrer. Noter que le "Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ " est évidemment à l'extérieur de l'énoncé de la propriété, sinon elle ne dépendrait plus de n !

Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1,$$

donc $P(1)$ est vraie.

Attention à bien commencer à la première valeur de n. Ici la propriété à montrer est pour $n \in \mathbb{N}^*$, c'est pour cela que l'on commence à $n = 1$. Ce serait $n = 0$ si on cherchait à la montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, si on cherche à montrer une égalité, on calcule chaque terme séparément pour rédiger correctement.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \quad \text{car } P(n) \text{ est vraie,} \\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\
&= (n+1)\frac{n+2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie. On a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

La propriété $P(n)$ s'appelle ici l'hypothèse de récurrence. C'est elle qui permet d'en déduire $P(n+1)$. Il faut donc déjà bien identifier ce qu'est $P(n+1)$ et trouver le chemin (raisonnements, calculs) permettant de passer de $P(n)$ à $P(n+1)$. Ici, dans la première ligne de calcul, on fait un lien entre la quantité donnée par $P(n+1)$ et celle donnée par $P(n)$, ce qui permet de remplacer, de factoriser et de conclure.
La rédaction est ici très importante : on choisit un n au hasard dans l'ensemble voulu (ici $\mathbb{N}^*$), on suppose que $P(n)$ est vraie et on énonce que l'on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
N'oubliez pas la conclusion, qui doit répondre à l'énoncé de la question, et de bien dire que vous avez raisonné par récurrence !