Fiche méthodologique : racines d'un nombre complexe

Laurent Bétermin

Le but de ce document est d'expliquer comment déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe. *(les parties en bleu sont des commentaires)*.

Ce qu'il faut retenir du cours :

- Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe w, on a deux choix :
  1. Si w peut être mis facilement sous forme exponentielle $w = re^{i\theta}$ où $r = |w|$ et θ est un argument de w, alors on a automatiquement

     $$z^2 = w \iff \begin{cases} |z| = \sqrt{r} \\ \arg(z) = \frac{\theta}{2} + k\pi, k \in \{0,1\}, \end{cases}$$

     et donc les racines carrées de w sont

     $$z_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = -z_0.$$

     Il suffit donc de calculer z_0 et de prendre $z_1 = -z_0$ (deux racines carrées sont forcément opposées !).
  2. Si w ne peut pas être mis facilement sous forme exponentielle, alors on doit passer par la forme algébrique. On souhaite résoudre $z^2 = w$ avec $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $w = a + ib$. On écrit donc, en développant la forme algébrique et en utilisant le module :
     - On a $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$,
     - On a aussi $|z|^2 = x^2 + y^2 = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

     donc par identification, on obtient $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b. \end{cases}$, et on résout ce système comme vu en CM (ou ci-dessous).

- Si on souhaite déterminer les racines n-ièmes où $n \geq 3$, alors on doit utiliser le résultat du cours (déjà utilisé ci-dessus pour les racines carrées). Soit $n \geq 3$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = w$. Alors si $w = re^{i\theta}$ où $r = |w|$ et θ est un argument de w, on a

  $$\begin{cases} |z| = r^{\frac{1}{n}} \\ \arg(z) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k \in \{0, ..., n-1\}. \end{cases}$$

  et il suffit donc de calculer les racines n-ièmes $\{z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ sous la forme

  $$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$$

  avec k allant de 0 (qui donne z_0) à $n-1$ (qui donne z_{n-1}).

ATTENTION : Ne jamais écrire $\sqrt{z}$ avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$!!! (par exemple $\sqrt{7i}$ ou $\sqrt{-2}$)

Enoncé 1 : Déterminer les racines carrées de $w = -5i$.

Ici, il est clair que l'on peut facilement déterminer la forme exponentielle de w.
On a $|w| = 5$ et donc $w = 5(-i) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc les racines carrées de w sont

$$z_0 = \sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \text{et} \quad z_1 = -z_0 = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Enoncé 2 : Déterminer les racines carrées de $w = 3 - 4i$.
Ici, comme $|w| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, alors $w = 5\left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)$, on ne trouvera pas la valeur exacte d'un angle θ tel que $(\cos\theta, \sin\theta) = (3/5, -4/5)$, donc on doit utiliser l'autre méthode.
On souhaite résoudre $z^2 = 3 - 4i$ avec $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient donc :

- $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$,
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = |w| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

et on résout donc le système $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4. \end{array}\right.$.
La somme des deux premières équations donne $2x^2 = 8$, donc $x^2 = 4$ et donc $x \in \{-2, 2\}$. La différence des deux premières équations donne $2y^2 = 2$, donc $y^2 = 1$ et ainsi $y \in \{-1, 1\}$. La dernière équation implique que x et y sont de signes opposés, donc les racines carrées de w sont $2 - i$ et $-2 + i$.
Evidemment, à la fin, vous pouvez toujours vérifier que $(2-i)^2 = 3 - 4i$ pour être sûr.e.

Enoncé 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines n-ièmes de 1.
Il s'agit ici d'une question générale, donc on applique directement le résultat du cours sur les racines n-ièmes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors comme $1 = 1e^{i0}$ ($r = 1$ et $\theta = 0$), ses racines n-ièmes sont

$$\left\{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}.$$

Enoncé 4 : Déterminer les racines cubiques de $w = 1 + i$.

On a $|w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, donc $w = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et le système d'équation $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ donne $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, ce qui permet de conclure que $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, les racines cubiques de w sont

$$z_0 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad z_2 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

c'est-à-dire *(Et là on ne peut pas écrire leurs formes algébriques à tous les trois)*

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$