

# Liste des questions de cours - Algèbre 1

Laurent Bétermin

4 décembre 2025

*Les questions de cours des examens (partiel et terminal) porteront sur un, deux ou trois de ces éléments du cours. Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas connaître le reste (très utile pour résoudre les exercices)!*

## 1 Questions de cours pour le Contrôle Partiel

### Chapitre 1 : Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$

1. Définition 1.1 de la commutativité d'une opération.
2. Définition des ensembles de nombres  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
3. Définition des ensembles  $E_+, E_-, E^*, E_+^*$  et  $E_-^*$ .
4. Proposition 1.8 (et sa preuve) : linéarité, homogénéité, sommes arithmétiques et géométriques.
5. Proposition 1.12 (et sa preuve) : factorisation de  $a^n - b^n$ .
6. Définition 1.14 : factorielle et coefficient binomial.
7. Proposition 1.16 (et sa preuve) : binôme de Newton.

### Chapitre 2 : Logique et raisonnements

1. Définition 2.1 (négation, conjonction, disjonction)
2. Proposition 2.3 (3.a), loi de De Morgan) : "non(P ou Q)" et "non(P) et non(Q)" ont les mêmes valeurs de vérité.
3. Définition 2.4 (implication)
4. Proposition 2.5 (Propriétés de l'implication, contraposée) : preuves des points 1, 2 et 3.
5. Définition 2.6 (Equivalence)
6. Définition 2.7 (Quantificateurs universel/existentiel)

### **Chapitre 3 : ensembles et applications**

1. Définition 3.8 (inclusion et parties d'un ensemble)
2. Calcul de  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$  quand  $E$  est un ensemble fini à  $n$  élément.
3. Proposition 3.10 (transitivité), avec sa preuve.
4. Définition 3.15 (généralisation à des familles d'ensembles)
5. Proposition 3.16 (distributivité), avec sa preuve (de la première égalité).
6. Proposition 3.19 (Loi de De Morgan), avec sa preuve.
7. Définition 3.23 (application).
8. Définition 3.24 (images, antécédents).
9. Proposition 3.27 (images directes/réciproques) et sa preuve.
10. Définitions 3.28, 3.30, 3.32 (injection, surjection, bijection).
11. Définition 3.24 (composition).

## **2 Questions de cours pour le Contrôle Terminal**

### **Chapitre 4 : nombres complexes**

1. Définition 4.3 (conjugué).
2. Propositions 4.4 (propriétés de la conjugaison), avec sa preuve.
3. Proposition 4.7 (propriétés du module), et sa preuve (sauf le cas d'égalité du 6.).
4. Définition 4.9 (forme trigonométrique/exponentielle).
5. Proposition 4.10 (propriétés de l'exponentielle complexe et de l'argument), et sa preuve.
6. Proposition 4.14 (équation du 2nd degré), et sa preuve (dans le cas complexe).
7. Définition 4.16 (affixe et longueur d'un vecteur).
8. Proposition ( cercle et disque), sans la preuve.

## **Chapitre 5 : arithmétique**

1. Définition 5.2 (nombre premier).
2. Théorème 5.4 (Euclide), avec sa preuve.
3. Théorème 5.5 (Théorème fondamental de l'arithmétique), sans la preuve.
4. Proposition 5.6 (division euclidienne), sans la preuve.
5. Proposition 5.9 (PGCD et décomposition), sans la preuve.
6. Proposition 5.12 (lien entre PGCD et PPCM), avec la preuve.
7. Définition 5.13 (nombres premiers entre eux).
8. Théorème 5.15 (Bézout), avec sa preuve.
9. Théorème 5.16 (Lemme de Gauss), avec sa preuve.
10. Théorème 5.18 (équation diophantienne), sans la preuve.
11. Définition 5.19 (congruences).
12. Proposition 5.20 (opérations et congruences), avec sa preuve.
13. Théorème 5.21 (petit Théorème de Fermat), sans sa preuve.

## **Chapitre 6 : polynômes**

1. Définition 6.1
2. Définition 6.3
3. Proposition 6.4 (degré de la somme et du produit), sans sa preuve.
4. Proposition 6.5 (produit nul), avec sa preuve
5. Proposition 6.7 (division euclidienne), sans sa preuve.
6. Proposition 6.8 (seulement la partie PGCD), sans sa preuve.
7. Proposition 6.19 (Formule de Taylor), sans sa preuve.
8. Définition 6.20 (racine)
9. Proposition 6.21 (racine et divisibilité), avec la preuve de  $x_0$  racine de  $P \iff X - x_0 \mid P$ .
10. Proposition 6.22 (degré et nombre de racines distinctes), avec sa preuve.
11. Définition 6.23 (ordre de multiplicité).
12. Proposition 6.24 (multiplicité et dérivée successives), sans sa preuve.
13. Proposition 6.30 (polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ ), sans sa preuve.
14. Théorème 6.31 (Théorème de D'Alembert-Gauss), sans sa preuve.
15. Proposition 6.32 (racines conjuguées), avec sa preuve.