Mini-DM 6 : Polynômes (date butoir : 05/12/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :
Prénom :
Numéro d'étudiant.e :

Exercice 6.1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha = X^4 + \alpha X^3 + 10X^2 + 12X + 8 \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que -2 est racine double de P_α. Montrer que $\alpha = 5$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction.

1. Comme -2 est racine de P_α, alors
$$P_\alpha(-2) = 16 - 8\alpha + 40 - 24 + 8 = 0$$
d'où $40 - 8\alpha = 0$ et donc $\alpha = 5$.
2. Comme -2 est racine double de P_5, $(X+2)^2$ divise P_5 et on a, par division euclidienne,
$$P_5 = (X+2)^2\left(X^2 + X + 2\right).$$
Le discriminant du polynôme X^2+X+2 vaut $\Delta = 1^2-4(1)(2) = 1-8 = -7 < 0$ donc X^2+X+2 est irréductible et la factorisation de P_5 dans $\mathbb{R}[X]$ est $(X+2)^2(X^2+X+2)$.
3. Dans $\mathbb{C}[X]$, on calcule les racines de X^2+X+2 qui sont
$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$$
et on a donc
$$P_5 = (X+2)^2\left(X - \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$$

Remarques après correction.

- Dans la question 1., le fait que -2 soit racine double donne trop d'information. Il suffisait juste d'utiliser le fait que -2 était racine de P_α.
- Pour la factorisation dans la question 2., faire la division euclidienne par $(X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$ est BEAUCOUP plus rapide que de faire une identification avec des coefficients.
- Attention : factoriser P_5 dans $\mathbb{R}[X]$ signifie l'écrire comme produit de facteurs irréductibles, c'est-à-dire de degré 1 ou de degré 2 avec discriminant négatif. Il fallait donc ne pas oublier que le discriminant de X^2+X+2 vaut $\Delta = -7 < 0$ (dans la question 2., pas seulement la 3.).

Exercice 6.2 : Soit $n \geq 3$, montrer que $P_n = X^n - nX + 1$ n'admet que des racines simples.
<u>Indication :</u> on pourra raisonner par l'absurde.

Correction. Soit $n \geq 3$. Supposons que P_n admette une racine double α, alors

$$P_n(\alpha) = \alpha^n - n\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad P_n'(\alpha) = n\alpha^{n-1} - n = 0.$$

La deuxième équation donne $\alpha^{n-1} = 1$, donc $\alpha^n = \alpha$ et ainsi, comme $\alpha^n - n\alpha + 1 = \alpha - n\alpha + 1 = \alpha(1-n) + 1$, la première équation donne, puisque $n \neq 1$,

$$\alpha(1-n) + 1 = 0 \iff \alpha = \frac{1}{n-1}$$

qui ne vérifie pas $\alpha^n = 1$ car $n \neq 2$. On a donc une contradiction, et donc P_n n'admet que des racines simples.

Remarques après correction.

- Si vous obtenez $X^{n-1} = 1$ et que vous en déduisez que X vaut 1 ou -1, c'est que vous avez restreint l'espace des solutions à $\mathbb{R}$, ce qui n'a aucun intérêt ici (ce serait en effet bien trop facile), et vous passez donc totalement à côté des difficultés de l'exercice !