Mini-DM 5 : Arithmétique (date butoir : 28/11/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :
Prénom :
Numéro d'étudiant.e :

Exercice 5.1 : Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $X = \mathbb{P} \cap (4\mathbb{N}+3)$ l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Le but de cet exercice est de montrer que X est infini.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer $4\mathbb{N}+1$ est stable par multiplication.
3. On suppose que X est fini et on écrit $X = \{p_1, \dots, p_n\}$. Soit $N = 4\prod_{i=1}^{n} p_i - 1$.
   Montrer par l'absurde que N admet un diviseur $p \in X$.
   <u>Indication :</u> si N n'admet aucun diviseur premier de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors tous les diviseurs premiers de N sont de la forme $4k+q$ où q est facile à trouver.
4. En déduire que X est infini.

Correction.

1. Le nombre $p = 3$ est premier et s'écrit $p = 4 \times 0 + 3$, avec $0 \in \mathbb{N}$, donc $p \in X$ et $X \neq \emptyset$.
2. Soit $m, n \in 4\mathbb{N}+1$, alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $m = 4k+1$ et $n = 4k'+1$. On a donc
   $$mn = (4k+1)(4k'+1) = 4kk' + 4k + 4k' + 1 = 4(kk' + k + k') + 1 \in 4\mathbb{N}+1,$$
   car $kk' + k + k' \in \mathbb{N}$. Ainsi, $4\mathbb{N}+1$ est stable par multiplication.
3. On sait que N admet des diviseurs premiers. Supposons qu'aucun de ses diviseurs n'appartienne à X, cela veut dire qu'aucun de ses diviseurs n'est dans l'ensemble $4\mathbb{N}+3$. Comme ces nombres sont premiers et que $N \in 4\mathbb{N}-1$ est impair, ils ne peuvent pas être dans $4\mathbb{N}$ ou $4\mathbb{N}+2$ (sinon ils seraient pairs), donc ils appartiennent nécessairement à l'ensemble $4\mathbb{N}+1$. Comme N est le produit de ses diviseurs premiers, alors par la question 2., $\exists k \in \mathbb{N}$, $N = 4k+1$. On obtient donc
   $$4k+1 = 4\prod_{i=1}^{n} p_i - 1,$$
   et ainsi $4\prod_{i=1}^{n} p_i = 4k+2$, donc $2k+1 = 2\prod_{i=1}^{n} p_i$, ce qui est impossible car le membre de droite est impair et celui de gauche est pair. Ainsi, N admet nécessairement un diviseur premier $p \in X$.
4. Soit $p \in X$ tel que $p|N$. Alors $p \left| \left(N - \prod_{i=1}^{n} p_i \right) \right.$ car $p \in X$, donc $p|1$, ce qui est impossible.
   Ainsi, X est infini.

Exercice 5.2 : Déterminer le chiffre des unités de 7^{7^7}.
<u>*Indication :*</u> *le chiffre des unités d'un entier est son reste dans la division euclidienne par* 10.
Correction. On commence par remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, on a

$$7^{4k+i} = (7^4)^k \times 7^i = (49 \times 49)^k \times 7^i \equiv (9 \times 9)^k \times 7^i [10] \equiv 7^i [10] \equiv \begin{cases} 1[10] & \text{si } i = 0 \\ 7[10] & \text{si } i = 1 \\ 9[10] & \text{si } i = 2 \\ 3[10] & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Cela montre que les puissances de 7 sont, modulo 10, cycliques de période 4. De plus,

$$7^7 \equiv 3^7 [4] \equiv (3^3)^2 \times 3 [4] \equiv 3^2 \times 3 [4] \equiv 3[4],$$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$, $7^7 = 4k+3$ et donc $7^{7^7} \equiv 3[10]$, ce qui veut dire que le chiffre des unités de ce nombre est 3.

Remarques après correction.

- Attention : $7^{7^7} \neq (7^7)^7$, puisque $(7^7)^7 = 7^{49}$ et $49 \neq 7^7$.
- On ne peut PAS utiliser le fait que si $a \equiv a'[m]$ et $b \equiv b'[m]$, alors $c^{a \times b} \equiv c^{a' \times b'}[m]$ avec $c \in \mathbb{N}$. Il faut se restreindre à utiliser les propriétés vues en CM.
- On ne pouvait évidemment pas utiliser directement le petit Théorème de Fermat dans la congruence modulo 10, puisque 10 n'est pas un nombre premier !