

Mini-DM 5 : Arithmétique (date butoir : 28/11/25)

Choisir **un seul** des exercices ci-dessous et le rendre **en CM** sur cette feuille.

NOM :

Prénom :

Numéro d'étudiant.e :

Exercice 5.1 : Soit \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et $X = \mathbb{P} \cap (4\mathbb{N} + 3)$ l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Le but de cet exercice est de montrer que X est infini.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer $4\mathbb{N} + 1$ est stable par multiplication.
3. On suppose que X est fini et on écrit $X = \{p_1, \dots, p_n\}$. Soit $N = 4 \prod_{i=1}^n p_i - 1$.

Montrer par l'absurde que N admet un diviseur $p \in X$.

Indication : si N n'admet aucun diviseur premier de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors tous les diviseurs premiers de N sont de la forme $4k + q$ où q est facile à trouver.

4. En déduire que X est infini.

Exercice 5.2 : Déterminer le chiffre des unités de 7^{7^7} .

Indication : le chiffre des unités d'un entier est son reste dans la division euclidienne par 10.

Réponse.