

Correction Mini-DM 3 : Ensembles et applications

Exercice 3.1 : On pose

$$E = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} : k \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que $E \subset F$.
2. Y a-t-il égalité entre les ensembles E et F ?
3. On considère l'ensemble $\Lambda = E - E = \{z = x - y : x \in E, y \in E\}$.
 - a) Montrer que $\Lambda \subset F$.
 - b) **BONUS (plus difficile) :** Montrer que $\Lambda \neq F$.

Correction.

1. Soit $x \in E$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{k(k+1)}$. De plus, on a

$$x = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

et donc, comme $k \in \mathbb{N}^*$ et $k+1 \in \mathbb{N}^*$, alors $x \in F$. Donc $E \subset F$.

2. On remarque que $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \in F$ (par exemple pour $m = n = 2$), alors que $\frac{1}{k(k+1)} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui veut dire que $0 \notin E$. Donc $F \not\subset E$ et donc $E \neq F$.
3. a) Si $z \in \Lambda = E - E$, alors il existe $x, y \in E$ tel que $z = x - y$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$z = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)},$$

qui est sous la forme $z = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ avec $n = k(k+1) \in \mathbb{N}^*$ et $m = k'(k'+1) \in \mathbb{N}^*$, donc $z \in F$ et ainsi $\Lambda \subset F$.

- b) Soit $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \in F$ Montrons que $z_0 \notin \Lambda$. Par l'absurde, supposons que $z_0 \in \Lambda$, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)}.$$

On raisonne maintenant par disjonction de cas sur k :

- si $k = 1$, alors $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ et on doit nécessairement avoir $\frac{1}{k'(k'+1)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $k'(k'+1) = 3$, ce qui n'est pas possible avec $k' \in \mathbb{N}^*$ puisque $k'(k'+1)$ est forcément divisible par 2 (vu en CM comme exemple de raisonnement par disjonction de cas).
- si $k \geq 2$, alors $k(k+1) \geq 6$ et donc $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{6}$, donc, comme pour tout $k' \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k'(k'+1)} > 0$, alors $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k'(k'+1)} < \frac{1}{6}$ ce qui est impossible.

On en déduit donc que $z_0 \notin \Lambda$, et donc que $F \not\subset \Lambda$, c'est-à-dire que $\Lambda \neq F$.

Remarques après correction.

- On a $x \in E \implies \exists k \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{k(k+1)}$. La preuve de 1. devait commencer comme ça ! Pour montrer une inclusion, on prend un élément du premier ensemble et on montre qu'il appartient nécessairement à l'autre ensemble, ce qui montre l'inclusion.
- Il fallait montrer que l'équation $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{3}$ (ou $\frac{3}{10}$) n'admettait pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x . Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Correction. Il est clair que $f(\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$, donc si $m \in \mathbb{N}$ est impair, il n'admet pas d'antécédent par f , donc f n'est pas surjective. Pour montrer l'injectivité, soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, alors

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2,$$

donc f est injective.

Soit $m \in \mathbb{N}$, alors il est clair que $g(2m) = E\left(\frac{2m}{2}\right) = E(m) = m$ puisque m est un entier, et donc m admet au moins un antécédent par g ($2m$), donc g est surjective.

Comme $g(0) = g(1) = 0$ et que $0 \neq 1$, on en déduit que g n'est pas injective.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f \circ g(n) = f(g(n)) = 2E\left(\frac{n}{2}\right)$. Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et donc

$$f \circ g(n) = 2E(k) = 2k = n.$$

Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$ et donc, comme $E\left(k + \frac{1}{2}\right) = k$, on a

$$f \circ g(n) = 2E\left(\frac{2k+1}{2}\right) = 2E\left(k + \frac{1}{2}\right) = 2k = n - 1.$$

On a aussi $g \circ f(n) = g(f(n)) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$. Ainsi, $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident sur $2\mathbb{N}$ mais pas sur $2\mathbb{N} + 1$. En particulier, $f \circ g \neq g \circ f$.

Remarques après correction.

- Beaucoup oublient d'introduire les variables. Par exemple, pour prouver l'injectivité de f , on doit :
 - a) écrire "Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ " pour définir n_1 et n_2 (cette partie est généralement oubliée dans vos copies !);
 - b) puis supposer que $f(n_1) = f(n_2)$;
 - c) par des arguments logiques, on déduit que $n_1 = n_2$.

De plus, il ne FAUT PAS mélanger les "donc" et les " $\implies$ " en écrivant par exemple "on suppose $f(n_1) = f(n_2)$ donc $2n_1 = 2n_2 \implies n_1 = n_2$ ". Mieux vaut écrire les choses comme dans la correction, ou bien : " $f(n_1) = f(n_2)$ donc $2n_1 = 2n_2$ donc $n_1 = n_2$ ".

- Attention aux ensembles : on peut écrire " $n, n' \in \mathbb{N}$ " ou " $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ ", mais ON N'ECRIT PAS " $n, n' \in \mathbb{N}^2$ " ou bien " $(n, n') \in \mathbb{N}$ ".
- Il est inutile de rappeler les définitions (injectivité, surjectivité) avant de faire les raisonnements (vous perdez du temps).
- Pour montrer qu'une application n'est pas injective (ou n'est pas surjective), un contre-exemple suffit généralement ! Ne faites pas un raisonnement par l'absurde si c'est pour finalement donner un contre-exemple.
- La contraposée de " $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, g(n_1) = g(n_2) \implies n_1 = n_2$ " N'EST PAS " $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, g(n_1) \neq g(n_2) \implies n_1 \neq n_2$ ". Il s'agit en fait de (revoir le cours !)

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, n_1 \neq n_2 \implies g(n_1) \neq g(n_2).$$

- On dit que " f est injective" et NON PAS " $f(n)$ est injective" car f est une application alors que $f(n)$ est un nombre !
- Attention : $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ g(n) = n = \text{Id}_{\mathbb{N}}(n)$ (et NON PAS " $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ " tout court, puisque ces quantités sont des nombres !).
- Il fallait expliquer pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}, 2E\left(\frac{n}{2}\right) \neq E(n)$ (en prenant $n = 1$ par exemple).
- Ecrire " $f \circ g = g \circ f$ pour n pair" n'a pas de sens ! Mieux vaut écrire " $f \circ g = g \circ f$ sur $2\mathbb{N}$ " ou bien " $f \circ g(n) = g \circ f(n)$ pour n pair".
- Evitez de parler de dérivée de f , puisque la fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{N}$!! Ou alors il faut parler de restriction de $x \mapsto 2x$ à $\mathbb{N}$, mais ça peut être délicat à écrire.
- On ne peut pas utiliser le Théorème des Valeurs Intermédiaires et la continuité pour des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ (ou alors parler de restriction comme au point précédent).
- Il ne fallait pas étudier l'injectivité et la surjectivité de $f \circ g$ et $g \circ f$. Restez bien dans le cadre des questions !
- Gardez la notation E pour la partie entière, sinon cela peut donner l'impression que vous avez recopié le résultat quelque part (IA générative ou autre). De manière générale, on s'attend à ce que seulement le vocabulaire du cours soit utilisé lors des évaluations.