

Correction Mini-DM 2 : Logique et raisonnements

Exercice 2.1 : Le but de cet exercice est de démontrer deux résultats laissés en exercices en CM et de traiter un exemple.

1. (*Loi de De Morgan*) Soient P et Q deux propositions. Montrer, en utilisant une table de vérité, que $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalent à $(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.
2. (*Raisonnement par l'absurde*) Soit P une proposition. Montrer, sans utiliser de table de vérité, que, pour toute proposition Q ,

P est équivalent à $(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$.

3. Montrer par l'absurde que, pour tout entiers relatifs a et b , on a

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Correction.

1. On construit la table de vérité comme suit

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Ainsi, $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et $(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$ ont les mêmes valeurs de vérité, elles sont donc équivalentes.

2. On a

$$\begin{aligned} & (\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)) \\ \iff & (P \text{ ou } \text{non}(Q)) \text{ et } (P \text{ ou } Q) \\ \iff & P \text{ ou } (\text{non } Q \text{ et } Q) \\ \iff & P \end{aligned}$$

car $(\text{non } Q \text{ et } Q)$ est une contradiction (toujours fausse), donc les valeurs de vérités de la proposition " $P \text{ ou } (\text{non } Q \text{ et } Q)$ " sont exactement celles de P .

3. Soit $P : \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b = 0$. On suppose $\text{non}(P)$, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $b \neq 0$. Alors, comme $b \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc P est vraie.

Remarques après correction.

- Quelques un.es oublient la conclusion après la table de vérité, attention !
- A la question 2., il était plus simple/rapide de travailler directement avec les prédicats, plutôt que de faire des cas (P vrai, P faux).

- Question 3 : attention à ce que vous supposez quand vous raisonnez par l'absurde. Pour montrer une propriété P, il faut supposer non(P). Ici P est une implication de type " $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, A \implies B$ ", donc il fallait supposer " $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, A$ et non(B)" pour aboutir proprement à une contradiction.

Exercice 2.2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$P(n) : u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $u_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. En effet, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

donc $P(n+1)$ est vraie. On a donc montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Remarques après correction.

- La rédaction proposée en cours et dans la fiche méthodologique sur le site de l'UE est **obligatoire**, et on ne peut pas tellement s'en écarter sans dire de bêtise :
 - Il faut définir la propriété/proposition P (cf. correction). De plus, écrire " u_n est vraie" n'a pas de sens.
 - Pour l'hérédité, on n'écrit surtout pas : "*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$.*" ou bien "*On suppose $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*" car faire cela, c'est déjà supposer que la propriété $P(n)$ est vraie tout le temps, donc il sera clair que $P(n+1)$ le sera aussi, sans faire de calcul ! C'est absurde !! Même chose si vous écrivez "*On suppose $P(n)$ vrai à partir d'un certain rang*", car cela veut dire que vous supposez que la propriété est vraie d'un certain indice jusqu'à l'infini, ce qu'il ne faut évidemment pas faire !
 - La conclusion doit être écrite, en spécifiant que vous avez utilisé un raisonnement par récurrence.
- Pour l'initialisation, on doit bien comprendre que vous avez calculé (ou juste recopié) d'un côté u_1 et de l'autre la valeur donnée par la formule que vous voulez démontrer.
- Pour l'hérédité, inutile de prendre une autre lettre pour l'indice, n suffit parfaitement ! Certain.es ont j'imagine confondu avec le raisonnement par récurrence forte où on doit supposer que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et où n a été fixé préalablement. C'est un raisonnement différent qu'il ne fallait pas utiliser ici !