

Correction Mini-DM 1 : Calculs dans \mathbb{R}

Merci de lire les remarques en rouge, et cela pour les deux exercices !

Exercice 1.1 : Soient x et y deux réels non-nuls tels que $x - y^2 = 1$. Calculer $\left(\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2}\right)^{2025}$.

Correction. Soient x et y deux réels tels que $x - y^2 = 1$. On remarque que

$$x^3 - y^6 = x^3 - (y^2)^3 = (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4) = x^2 + xy^2 + y^4,$$

et donc

$$\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2} = \frac{x^2 + xy^2 + y^4 - (x + y^2)^2}{xy^2} = \frac{x^2 + xy^2 + y^4 - x^2 - 2xy^2 - y^4}{xy^2} = -\frac{xy^2}{xy^2} = -1.$$

On obtient donc $\left(\frac{x^3 - (x + y^2)^2 - y^6}{xy^2}\right)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$ car 2025 est impair.

Remarques après correction.

- Toujours introduire les variables/paramètres en début de preuve. De quels x et y parle-t-on ? A quels ensembles de nombres appartiennent-ils ?
- Entre des nombres, pour signifier qu'ils sont égaux, on met des symboles "=" et surtout pas de symbole " \Rightarrow " ni " \Leftarrow " qui se placent entre les équations, inéquations, ou propositions mathématiques.
- Il vous faut donc organiser votre calcul de manière à pouvoir mettre des signes = entre les quantités (nombres, expressions algébriques).
- Si vous avez écrit $y^2 = x - 1$ et donc $y = \sqrt{x - 1}$, vous avez oublié le cas $y = -\sqrt{x - 1}$.

Exercice 1.2 : Montrer que $\sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 29$.

Correction. En multipliant par l'expression conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{840} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k} = \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{840} \sqrt{k} \\ &= \sum_{j=1}^{841} \sqrt{j} - \sum_{k=0}^{840} k \\ &= \sqrt{841} = 29, \end{aligned}$$

où on a posé $j = k+1$ dans la première somme (on peut aussi directement utiliser la proposition portant sur les sommes télescopiques).

Remarques après correction.

- Si vous écrivez que $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, alors il faut rajouter "pour tout $k \in \mathbb{N}$ " (on présente toujours les variables/paramètres).
- Par contre, inutile d'écrire "pour tout $k \in \mathbb{N}$ " si vous travaillez directement avec les sommes (comme dans la correction ci-dessus), puisque la somme à calculer ne dépend pas de la variable k (je peux changer le nom de cette variable sans changer le résultat).
- Entre des nombres, pour signifier qu'ils sont égaux, on met des symboles "=" et surtout pas de symbole " \Rightarrow " ni " \iff " qui se placent entre les équations, inéquations, ou propositions mathématiques.
- Ecrire $\sum_{k=0}^{840} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ est faux et n'a aucun sens !