Fiche méthodologique : factorisation d'un polynôme

Laurent Bétermin

Le but de ce document est d'expliquer comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$. *(les parties en bleu sont des commentaires).*

Enoncé 1 : Factoriser le polynôme $2X^2+5X+2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Les polynômes du second degré se factorise facilement, en se rappelant que l'on a la factorisation $aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du polynômes, s'ils elles existent dans l'ensemble que l'on considère.

Le discriminant du polynôme est $\Delta = 5^2-4(2)(2)=9>0$, donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-5-3}{4}=-2.$$

On a donc $2X^2+5X+2=2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X+2)$. *(La factorisation est évidemment la même dans $\mathbb{R}[X]$ car les racines sont réelles)*

Enoncé 2 : Factoriser le polynôme X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

On calcule facilement les racines de ce polynômes *(Dans ce cas, calculer le discriminant est maladroit !)* :

$$\forall x\in\mathbb{C},\quad x^2+1=0 \iff x^2=-1 \iff x\in\{i,-i\}.$$

Ainsi, le polynôme n'admet pas de racine réelle, il est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (on ne peut pas le factoriser). De plus, sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$X^2+1=(X-i)(X+i).$$

Enoncé 3 : Factoriser le polynôme X^3+X^2+X dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

On a $X^3+X^2+X=X(X^2+X+1)$. De plus, le discriminant de X^2+X+1 vaut $\Delta=1^2-4(1)(1)=-3<0$ donc X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation est $X(X^2+X+1)$.
Les racines de X^2+X+1 sont donc complexes et valent

$$x_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\overline{j}.$$

Ainsi, $X^3+X^2+X=X(X-j)(X-\overline{j})$. *(Comme celle de i, la notation $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est fixée !)*

Enoncé 4 : Factoriser le polynôme $P=X^3+X^2-X-1$.

Si le polynôme n'est pas du second degré et ne se factorise pas directement par une puissance de X, il faut chercher des racines évidentes (en essayant $1,-1,2$ ou -2).

On remarque que $P(1)=0$, donc 1 est racine de P et on a, par division euclidienne :

$$P=(X-1)(X^2+2X+1)$$

qui se factorise facilement en $P=(X-1)(X+1)^2$.
(On aurait aussi pu voir facilement que $P(-1)=0$, et factoriser P aussi par $(X+1)$ ce qui aurait donné $P=(X+1)(X-1)(X+1)$ et donc le résultat voulu.)

Enoncé 5 : Soit $n \geq 2$, factoriser $P = X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Les racines de P sont données par les racines de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^n = 1$. Ce sont donc les racines n-ièmes de 1 qui sont données par

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}},$$

et donc on factorise P comme suit :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right).$$

Enoncé 6 : Factoriser $P = X^4 - 11X^3 + 29X^2 - 11X + 28$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$, en remarquant que i est racine de P.

On commence par vérifier que $P(i) = i^4 - 11i^3 + 29i^2 - 11i + 28 = 1 + 11i - 29 - 11i + 28 = 0$, donc i est bien racine de P. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et que i est racine de P, son conjugué $-i$ est aussi racine de P, donc P est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2+1$ et on obtient, par division euclidienne,

$$P = (X^2+1)(X^2-11X+28).$$

Le discriminant de $X^2 - 11X + 28$ vaut $\Delta = (-11)^2 - 4(1)(28) = 9 > 0$, donc ce polynôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{11+3}{2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11-3}{2} = 4.$$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc, comme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$,

$$P = (X^2+1)(X-7)(X-4),$$

alors que sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P = (X-i)(X+i)(X-7)(X-4).$$

*On voit ici que le fait qu'un complexe ET son conjugué sont toujours tous les deux racines d'un ponyôme à coefficients **réels**, est clairement nécessaire pour factoriser P, si on ne peut pas trouver de racine évidente. Une fois que vous savez que $X - z_0$ et $X - \overline{z_0}$ divisent P, alors $(X-z_0)(X-\overline{z_0})$ divise P et on a (cf. chapitre sur les complexes)*

$$(X-z_0)(X-\overline{z_0}) = X^2 - (z_0 + \overline{z_0})X + z_0\overline{z_0} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|^2 \in \mathbb{R}[X],$$

(comme $\mathrm{Re}(z_0) \in \mathbb{R}$ et $|z_0|^2 \in \mathbb{R}$) qui divise P.