

Exercices supplémentaires - Polynômes

Exercice 1. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

$$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1, \quad P_2 = X^9 + X^6 + X^3 + 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25.$$

Exercice 2. Soit $P = X^6 + X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 7X^2 + X + 3$.

1. Montrer que i est racine double de P .
2. En déduire (sans calcul) une autre racine double de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer deux racines entières de P ainsi que leurs multiplicités.
2. Vérifier que $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$ est racine de P .
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser $P_n = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, alors on définit $P_n = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P_n et factoriser P_n et $\frac{P_n}{X}$.
2. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.