

Exercices supplémentaires - Congruences

Exercice 1.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x \equiv 4 [7]$ et $y \equiv 2 [7]$. Montrer que $3x + y$ est divisible par 7.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x \equiv 4 [13]$ et $y \equiv 5 [13]$. Montrer que $x^2 + 2y$ est divisible par 13.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv 2 [5]$. Montrer que $n^4 + n - 3$ est divisible par 5.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $4^{3n} - 4^n$ est divisible par 5.
2. $7^{2n+1} + 1$ est divisible par 8.
3. $10^n - 1$ est divisible par 9.
4. $5^n + 19$ est divisible par 4.

Exercice 3.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $4^n \equiv 3n + 1 [9]$ et en déduire que $2^{2n} + 15 - 1$ est divisible par 9.