

## Exercices supplémentaires - Congruences

### Exercice 1.

1. Soient  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x \equiv 4 \pmod{7}$  et  $y \equiv 2 \pmod{7}$ . Montrer que  $3x + y$  est divisible par 7.
2. Soient  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x \equiv 4 \pmod{13}$  et  $y \equiv 5 \pmod{13}$ . Montrer que  $x^2 + 2y$  est divisible par 13.
3. Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \equiv 2 \pmod{5}$ . Montrer que  $n^4 + n - 3$  est divisible par 5.

### Exercice 2.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

1.  $4^{3n} - 4^n$  est divisible par 5.
2.  $7^{2n+1} + 1$  est divisible par 8.
3.  $10^n - 1$  est divisible par 9.
4.  $5^n + 19$  est divisible par 4.

### Exercice 3.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$  est divisible par 7.

### Exercice 4.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$  et en déduire que  $2^{2n} + 15 - 1$  est divisible par 9.