Exercices supplémentaires - Ensembles et applications

Autour de la dénombrabilité

Exercice 1. Théorème de Cantor-Bernstein
Soient E et F deux ensembles, ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications injectives. Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème de Cantor-Bernstein, c'est-à-dire qu'il existe une bijection $h : E \to F$.

1. Montrer que si l'un des ensembles E et F est vide, alors l'autre l'est également.
   Dans toute la suite, on suppose que E et F sont non-vides.

2. Soit $\mathscr{U} = \{A \in \mathscr{P}(E) : g(F \backslash f(A) \subset E \backslash A\}$.

   a) Montrer que $\mathscr{U} \neq \emptyset$.
   b) Montrer que $K = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{U}} A \in \mathscr{U}$.

3. Soit $H = E \backslash g\big(F \backslash f(K)\big)$.

   a) Montrer que $H \in \mathscr{U}$.
   b) Montrer que $H = K$.

4. En déduire que $h : E \to F$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E \backslash K \end{cases}$$

   est une bijection, où on a noté, pour $x \in g(F)$, $g^{-1}(x)$ l'unique antécédent de x par g.

Exercice 2. Outils pour montrer la dénombrabilité
Soit E un ensemble. On rappelle qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que

(i) s'il existe une injection de E dans un ensemble dénombrable, alors E est dénombrable.

(ii) s'il existe une surjection d'un ensemble dénombrable dans E, alors E est dénombrable.

Exercice 3. Dénombrabilité

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) : \begin{cases} 2n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ -2n-1 & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^*. \end{cases}$ est bijective et en déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2. On considère l'application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Montrer que φ est injective et en déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombable.

3. Utiliser de même l'application $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto \frac{p}{q}$ pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 4. Théorème de Cantor
Soit E un ensemble et $\varphi : E \to \mathscr{P}(E)$ une application. On considère $A = \{x \in E : x \notin \varphi(x)\}$.

1. Montrer par un raisonnement par l'absurde qu'il n'existe pas d'élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) = A$.

2. En déduire le Théorème de Cantor, c'est-à-dire que E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

3. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5. Non-dénombrabilité de $X^{\mathbb{N}}$
Soit X un ensemble ayant au moins deux éléments. On note $X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeur dans X.
Soit $(x_0, x_1) \in X^2$, avec $x_0 \neq x_1$ et φ l'application qui à une partie A de $\mathbb{N}$ associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} x_0 & \text{si } n \notin A \\ x_1 & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $X^{\mathbb{N}}$.

2. En déduire que $X^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 6. Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$
Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Pour cela, on va montrer que $[0,1]$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ en considérant l'application $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$.

1. Montrer que $\phi(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \subset [0,1]$.

2. Montrer que ϕ est injective.

3. En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.