

## Exercices supplémentaires - Logique et raisonnements

### Exercice 1. Logique

Montrer par disjonction de cas que dans un groupe de personnes non vide, il existe toujours une personne  $P$  telle que :

$P$  a les yeux bleus  $\Rightarrow$  toutes les personnes du groupe ont les yeux bleus.

### Exercice 2. Implication

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$ .

### Exercice 3. Récurrence et somme

Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$ .

### Exercice 4. Irrationalité de $\cos(1^\circ)$

On suppose ici que les angles sont exprimés en degrés.

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\cos(n+1) = 2 \cos(n) \cos(1) - \cos(n-1)$ .
2. On suppose ici que  $\cos(1) \in \mathbb{Q}$ . Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\cos(n) \in \mathbb{Q}$ .
3. Conclure que  $\cos(1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### Exercice 5. Application du grand Théorème de Fermat

1. Chercher sur Internet l'énoncé précis du grand Théorème de Fermat.
2. Utiliser ce théorème pour montrer que  $\sqrt[n]{2}$  est irrationnel pour tout entier  $n \geq 3$ .