Exercices supplémentaires - Logique et raisonnements

Exercice 1. Logique
Montrer par disjonction de cas que dans un groupe de personnes non vide, il existe toujours une personne P telle que :

$$P \text{ a les yeux bleus} \Rightarrow \text{toutes les personnes du groupe ont les yeux bleus.}$$

Exercice 2. Implication
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon \Rightarrow a = 0$.

Exercice 3. Récurrence et somme
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Exercice 4. Irrationalité de cos(1°)
On suppose ici que les angles sont exprimés en degrés.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos(n+1) = 2\cos(n)\cos(1) - \cos(n-1)$.
2. On suppose ici que $\cos(1) \in \mathbb{Q}$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(n) \in \mathbb{Q}$.
3. Conclure que $\cos(1) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Application du grand Théorème de Fermat

1. Chercher sur Internet l'énoncé précis du grand Théorème de Fermat.
2. Utiliser ce théorème pour montrer que $\sqrt[n]{2}$ est irrationnel pour tout entier $n \geq 3$.