Exercices supplémentaires - Calculs algébriques

Exercice 1. Sommes de puissances
Pour $n \in \mathbb{N}$, a déjà vu dans le cours comment calculer $S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k$ (symétrie de sommation, récurrence) et en Travaux Dirigés comment calculer $S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$ (récurrence). L'objectif de cet exercice est d'utiliser une autre méthode permettant d'obtenir facilement les sommes de type $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on a
$$\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)^2,$$
et en déduire la valeur de $S_1(n)$.

2. Utiliser la même idée que précédemment pour déterminer la valeur de $S_2(n)$, puis $S_3(n)$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Expliquer comment on peut obtenir $S_p(n)$ en utilisant la méthode précédente.

Exercice 2. Somme géométrique et dérivation
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

2. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

4. Utiliser la même méthode pour déterminer la valeur, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, de $\sum_{k=0}^{n} k^2 x^k$, puis de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2 x^k$ quand $|x| < 1$.

Exercice 3. Série géométrique
On suppose que l'aire du triangle équilatéral tracé ci-dessous vaut 1. Déterminer l'aire de la partie grise de deux manières différentes, illustrant ainsi la limite d'une certaine somme géométrique que l'on précisera.