

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Soit $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de **Fibonacci**, i.e., une suite vérifiant

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Montrer que le nombre F_n vérifie

$$F_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-1-k}{k}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier vos réponses.
2. Trouver les $w \in \mathbb{C}$ tels que le nombre d'éléments de $f^{-1}(w)$ soit 1.

Exercice 3

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Exercice 4 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est une racine double de P .

1. Déterminer a et b .
2. Montrer que $-1 + i$ est une racine de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 Calculer le reste de la division euclidienne de 123^{456} par 7.