

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Montrer l'identité suivante par récurrence.

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = \frac{z}{z-1} \left(\frac{z^n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k(k+1)} \right) \quad \forall n > 1.$$

Exercice 2

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Exercice 3 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est une racine double de P .

1. Déterminer a et b .
2. Montrer que $-1 + i$ est une racine de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier vos réponses.
2. Trouver les $w \in \mathbb{C}$ tels que le nombre d'éléments de $f^{-1}(w)$ soit 1.

Exercice 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $((\sin \theta)X + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$.