Fiche méthodologique : égalité/inclusion d'ensembles

Laurent Bétermin

Le but de ce document est d'expliquer, avec trois exemples, comment rédiger et démontrer une inclusion ou une égalité d'ensembles. On rappelle que :

- $A \subset B \iff \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff$ si $x \in A$ alors $x \in B$.
- $A = B \iff \forall x, (x \in A \iff x \in B) \iff A \subset B$ et $B \subset A$.

(les parties en bleu sont des commentaires).

Enoncé 1 : Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 \in [2,3]\right\}$. Montrer que $A = B$.

En effet, soit $x \in A$, on a $x \in A \iff x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0 \iff X^2 - 5X + 6 \leq 0$, $X = x^2$.
Comme on cherche à montrer une égalité, on commence ici par "Soit $x \in A$" et on cherche à trouver des équivalences qui nous mènent à "$x \in B$". Ce n'est pas toujours possible et il faudra souvent passer par une double inclusion.

Comme le discriminant du polynôme $X^2 - 5X + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes $X_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Comme le coefficient de X^2 vaut $1 > 0$, on en déduit que

$$X^2 - 5X + 6 \leq 0,\ X = x^2 \iff X \in [2,3],\ X = x^2 \iff x^2 \in [2,3] \iff x \in B,$$

et donc $A = B$.
Attention : si vous n'utilisez que des "donc", vous aurez montrer que $x \in A \Rightarrow x \in B$ et donc que $A \subset B$, et il faudra démontrer l'inclusion réciproque en recommençant par "Soit $x \in B$" pour atteindre, par implications, "alors $x \in A$". Cela veut dire que la rédaction doit être très précise, avec l'utilisation d'équivalences (ou de "si et seulement si", ce qui est pareil). Si vous n'y arrivez pas, faites la démonstration par double inclusion.

Enoncé 2 : Montrer que $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 3y^2 \leq 1\right\} \subset \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $4x^2 + 3y^2 \leq 1$, alors comme

$$x^2 + y^2 \leq 4x^2 + 3y^2 \leq 1,$$

on en déduit que $x^2 + y^2 \leq 1$ et l'inclusion est démontrée.
On est bien parti de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans l'ensemble de gauche et on a montré que cela impliquait ("on en déduit que") que (x,y) était dans l'ensemble de droite.

Enoncé 3 : Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + y = 1\}$ et $B = \{(t-1, -3t+4) : t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

On raisonne ici par double inclusion. Soit $(x, y) \in A$, alors $3x + y = 1$. Soit $t = x + 1$, alors $x = t - 1$ et $y = 1 - 3x = 1 - 3(t-1) = -3t + 4$. Ainsi, $(x, y) = (t-1, -3t+4)$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $(x, y) \in B$. D'où $A \subset B$.

Réciproquement, soit $t \in \mathbb{R}$ et $(t-1, -3t+4) \in B$. Alors $3(t-1) + (-3t+4) = 1$ et donc on a $(t-1, -3t+4) \in A$. D'où $B \subset A$ et donc $A = B$.
Ici, pour bien rédiger, il vaut mieux raisonner par double inclusion car le lien entre x, y et t n'est pas facile à écrire en terme d'équivalence.